Алгебра 2 **02.09.2015.**
Л смер

$\boxed{1}$ Нека је $\mathbb{K} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} : a \in \mathbb{Z} \right\}$.

а) Доказати да је $\mathbb{K}$ комутативан потпрстен прстена $M_2(\mathbb{Z})$, али да није поље.

б) Нека је $I = \{p(x) \in \mathbb{Z}[x] : p(2) = 0\}$. Доказати да је I прост идеал прстена $\mathbb{Z}[x]$. Да ли је идеал I главни?

в) Доказати да је са
$$\phi : p \mapsto \begin{bmatrix} p(2) & 0 \\ 0 & p(2) \end{bmatrix}$$
дефинисан епиморфизам прстена $\mathbb{Z}[x]$ на прстен K, а затим испитати да ли је идеал I максималан.

$\boxed{2}$ Нека је $\alpha = \sqrt{5} + i\sqrt{3}$.

а) Одредити минимални полином μ_α елемента α над $\mathbb{Q}$.

б) Ако је K факторизацијско поље полинома μ_α над пољем $\mathbb{Q}$, испитати да ли је K једнако факторизацијском пољу полинома $X^4 + 4X^2 + 64$ и одредити степен раширења $[K : \mathbb{Q}]$.

в) Одредити полином најмањег степена $q \in \mathbb{Q}[X]$ за који је $\frac{\alpha}{\alpha^2+7} = q(\alpha)$.

$\boxed{3}$ Нека је $f(X) = X^3 + X^2 + 2X + 1 \in \mathbb{Z}_3[X]$.

а) Доказати да је полином f нерастављив у прстену $\mathbb{Z}_3[X]$, а затим да је $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_3[X]/_{\langle f \rangle}$ поље.

б) Одредити једну базу векторског простора $\mathbb{F}$ над пољем $\mathbb{Z}_3$ као и број елемената поља $\mathbb{F}$.

в) Ако је $\alpha = X^2 + X + \langle f \rangle$, одредити мултипликативни инверз елемента α у пољу $\mathbb{F}$.

$\boxed{4}$ Нека је $G = GL(2, \mathbb{Z}_2)$ група свих инвертибилних матрица реда 2 над пољем $\mathbb{Z}_2$.

а) Доказати да је са $A \odot X = AXA^T$ дефинисано дејство групе G на њој самој.

б) Одредити орбите и стабилизаторе елемената $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ при овом дејству. Колико има различитих орбита?

$\boxed{5}$ Нека је G рупа реда $11990 = 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 109$.

а) Доказати да G има нормалну подгрупу реда 11 или реда 109.

б) Доказати да G има подгрупу H реда $11 \cdot 109$, а затим да је H циклична.

в) Доказати да је H нормална подгрупа групе G.

Све одговоре детаљно образложити

Алгебра 2 **02.09.2015.**
Л смер

$\boxed{1}$ Нека је $\mathbb{K} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} : a \in \mathbb{Z} \right\}$.

а) Доказати да је $\mathbb{K}$ комутативан потпрстен прстена $M_2(\mathbb{Z})$, али да није поље.

б) Нека је $I = \{p(x) \in \mathbb{Z}[x] : p(2) = 0\}$. Доказати да је I прост идеал прстена $\mathbb{Z}[x]$. Да ли је идеал I главни?

в) Доказати да је са
$$\phi : p \mapsto \begin{bmatrix} p(2) & 0 \\ 0 & p(2) \end{bmatrix}$$
дефинисан епиморфизам прстена $\mathbb{Z}[x]$ на прстен K, а затим испитати да ли је идеал I максималан.

$\boxed{2}$ Нека је $\alpha = \sqrt{5} + i\sqrt{3}$.

а) Одредити минимални полином μ_α елемента α над $\mathbb{Q}$.

б) Ако је K факторизацијско поље полинома μ_α над пољем $\mathbb{Q}$, испитати да ли је K једнако факторизацијском пољу полинома $X^4 + 4X^2 + 64$ и одредити степен раширења $[K : \mathbb{Q}]$.

в) Одредити полином најмањег степена $q \in \mathbb{Q}[X]$ за који је $\frac{\alpha}{\alpha^2+7} = q(\alpha)$.

$\boxed{3}$ Нека је $f(X) = X^3 + X^2 + 2X + 1 \in \mathbb{Z}_3[X]$.

а) Доказати да је полином f нерастављив у прстену $\mathbb{Z}_3[X]$, а затим да је $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_3[X]/_{\langle f \rangle}$ поље.

б) Одредити једну базу векторског простора $\mathbb{F}$ над пољем $\mathbb{Z}_3$ као и број елемената поља $\mathbb{F}$.

в) Ако је $\alpha = X^2 + X + \langle f \rangle$, одредити мултипликативни инверз елемента α у пољу $\mathbb{F}$.

$\boxed{4}$ Нека је $G = GL(2, \mathbb{Z}_2)$ група свих инвертибилних матрица реда 2 над пољем $\mathbb{Z}_2$.

а) Доказати да је са $A \odot X = AXA^T$ дефинисано дејство групе G на њој самој.

б) Одредити орбите и стабилизаторе елемената $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ при овом дејству. Колико има различитих орбита?

$\boxed{5}$ Нека је G рупа реда $11990 = 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 109$.

а) Доказати да G има нормалну подгрупу реда 11 или реда 109.

б) Доказати да G има подгрупу H реда $11 \cdot 109$, а затим да је H циклична.

в) Доказати да је H нормална подгрупа групе G.

Све одговоре детаљно образложити