Алгебра 3, Јануар 2016. *3. фебруар 2016.*

1. Нека је R прстен конвергентних реалних низова $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Доказати да R није Нетерин.

2. Нека је k поље и $R = k[X,Y]/\langle X^5 - Y^3\rangle$. Познато је да је R домен. Означимо $\bar{X} = X + \langle X^5 - Y^3\rangle$ и $\bar{Y} = Y + \langle X^5 - Y^3\rangle$ у R, и $T = \bar{X}^2/\bar{Y}$ у пољу разломака F домена R.

(а) Доказати да је $R \subseteq k[T]$. Доказати да је претходно раширење интегрално.

(б) Доказати да је $k[T]$ интегрално затворење домена R.

3. Доказати да је раширење $\mathbb{Q}(i, \sqrt[6]{3})/\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ Галоаово и описати његову коресподенцију.

4. Нека је ABC једнакокраки троугао такав да је $AB = AC = 3$ и чији је полупречник споља приписаног круга наспрам темена A једнак $r_a = 1$. Доказати да ABC није конструктибилан лењиром и шестаром.

5. Испитати решивост у радикалима једначине $X^5 - X + 1 = 0$.

6. Нека је p непаран прост број и $K = \mathbb{F}_p(\omega^p - \theta - \theta^2, \theta^p)$. Одредити $|\mathbb{F}_p(\omega,\theta) : K|$ и $|\mathbb{F}_p(\omega,\theta) : K|_s$.

7. У $\mathbb{C}[x,z,y]$ су дати идеали $I = \langle xy + y^2, xz + yz\rangle$ и $J = \langle xy + y^2, xz + yz + xyz + y^2z\rangle$.
Испитати да ли је $I = J$ и да ли је $Z(I) = Z(J)$.

8. Доказати да се сваки радикалски идеал $J \subseteq k[X_1, X_2, ..., X_n]$ може на јединствен начин представити као пресек коначно много простих идеала $P_j \subseteq k[X_1, X_2, ..., X_n], 1 \leqslant j \leqslant r$, $r(J) = J = P_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap P_r$, при чему $P_i \nsubseteq P_j$, за све $i \neq j$.

Алгебра 3, Јануар 2016. *3. фебруар 2016.*

1. Нека је R прстен конвергентних реалних низова $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Доказати да R није Нетерин.

2. Нека је k поље и $R = k[X,Y]/\langle X^5 - Y^3\rangle$. Познато је да је R домен. Означимо $\bar{X} = X + \langle X^5 - Y^3\rangle$ и $\bar{Y} = Y + \langle X^5 - Y^3\rangle$ у R, и $T = \bar{X}^2/\bar{Y}$ у пољу разломака F домена R.

(а) Доказати да је $R \subseteq k[T]$. Доказати да је претходно раширење интегрално.

(б) Доказати да је $k[T]$ интегрално затворење домена R.

3. Доказати да је раширење $\mathbb{Q}(i, \sqrt[6]{3})/\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ Галоаово и описати његову коресподенцију.

4. Нека је ABC једнакокраки троугао такав да је $AB = AC = 3$ и чији је полупречник споља приписаног круга наспрам темена A једнак $r_a = 1$. Доказати да ABC није конструктибилан лењиром и шестаром.

5. Испитати решивост у радикалима једначине $X^5 - X + 1 = 0$.

6. Нека је p непаран прост број и $K = \mathbb{F}_p(\omega^p - \theta - \theta^2, \theta^p)$. Одредити $|\mathbb{F}_p(\omega,\theta) : K|$ и $|\mathbb{F}_p(\omega,\theta) : K|_s$.

7. У $\mathbb{C}[x,z,y]$ су дати идеали $I = \langle xy + y^2, xz + yz\rangle$ и $J = \langle xy + y^2, xz + yz + xyz + y^2z\rangle$.
Испитати да ли је $I = J$ и да ли је $Z(I) = Z(J)$.

8. Доказати да се сваки радикалски идеал $J \subseteq k[X_1, X_2, ..., X_n]$ може на јединствен начин представити као пресек коначно много простих идеала $P_j \subseteq k[X_1, X_2, ..., X_n], 1 \leqslant j \leqslant r$, $r(J) = J = P_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap P_r$, при чему $P_i \nsubseteq P_j$, за све $i \neq j$.