Алгебра 3, Јун 2016. *20. јун 2016.*

1. Испитати да ли је $R = \{f \in \mathbb{C}[X,Y] \mid f'_Y(0,Y) = 0\}$ Нетерин прстен.

2. Нека су $R \subseteq S$ домени са истим пољем разломака F. Нека су $\alpha \in S$, $c \in R$, $c \neq 0$, и $n_0 \geqslant 1$ такви да за све $n \geqslant n_0$ важи $c\alpha^n \in R$. Ако је R Нетерин, доказати да је α интегралан над R.

3. Нека је R прстен, $\alpha \in R$ и $S = \{\alpha^n \mid n \geqslant 0\}$. Доказати да је $S^{-1}R \cong R[X]/\langle \alpha X - 1\rangle$.

4. Израчунати радикал идеала $\langle XY, XZ - YZ\rangle$ у $k[X,Y,Z]$. (k није обавезно алгебарски затворено.)

5. Нека је F коренско поље полинома $X^8 - 9 \in \mathbb{Q}[X]$. Одредити сва међупоља раширења $F/\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$.

6. Нека је $f(X) \in k[X]$ несводљив сепарабилан полином простог степена p. Нека је S скуп његових корена и $F = k(S)$ његово коренско поље. **(а)** Доказати да $\mathrm{Gal}(F/k)$ садржи p-цикл (посматрајући $\mathrm{Gal}(F/k)$ на природан начин као подгрупу од $\mathrm{Sym}(S)$). **(б)** Ако постоје $\alpha, \beta \in S$ такви да $\beta \in k(\alpha)$, доказати да је $F = k(\alpha)$ и $\mathrm{Gal}(F/k) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

7. Користећи теорију поља доказати да је правилни петоугао конструктибилан.

8. Доказати да је пројекција $\pi : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \longrightarrow \mathbb{P}^m$ затворена. (Пресликавање је затворено ако су слике затворених скупова затворени скупови.)

Алгебра 3, Јун 2016. *20. јун 2016.*

1. Испитати да ли је $R = \{f \in \mathbb{C}[X,Y] \mid f'_Y(0,Y) = 0\}$ Нетерин прстен.

2. Нека су $R \subseteq S$ домени са истим пољем разломака F. Нека су $\alpha \in S$, $c \in R$, $c \neq 0$, и $n_0 \geqslant 1$ такви да за све $n \geqslant n_0$ важи $c\alpha^n \in R$. Ако је R Нетерин, доказати да је α интегралан над R.

3. Нека је R прстен, $\alpha \in R$ и $S = \{\alpha^n \mid n \geqslant 0\}$. Доказати да је $S^{-1}R \cong R[X]/\langle \alpha X - 1\rangle$.

4. Израчунати радикал идеала $\langle XY, XZ - YZ\rangle$ у $k[X,Y,Z]$. (k није обавезно алгебарски затворено.)

5. Нека је F коренско поље полинома $X^8 - 9 \in \mathbb{Q}[X]$. Одредити сва међупоља раширења $F/\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$.

6. Нека је $f(X) \in k[X]$ несводљив сепарабилан полином простог степена p. Нека је S скуп његових корена и $F = k(S)$ његово коренско поље. **(а)** Доказати да $\mathrm{Gal}(F/k)$ садржи p-цикл (посматрајући $\mathrm{Gal}(F/k)$ на природан начин као подгрупу од $\mathrm{Sym}(S)$). **(б)** Ако постоје $\alpha, \beta \in S$ такви да $\beta \in k(\alpha)$, доказати да је $F = k(\alpha)$ и $\mathrm{Gal}(F/k) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

7. Користећи теорију поља доказати да је правилни петоугао конструктибилан.

8. Доказати да је пројекција $\pi : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \longrightarrow \mathbb{P}^m$ затворена. (Пресликавање је затворено ако су слике затворених скупова затворени скупови.)