Алгебра 3, Колоквијум 2016. *16. април 2016.*

1. Нека је k поље и $R = \{(Xf + a, a) \mid f \in k[X,Y],\ a \in k\}$ потпрстен од $k[X,Y] \times k$. Доказати да R није Нетерин.

2. Нека је k поље и $R = \{f \in k[X] \mid f(0) = f(1)\}$ потпрстен од $k[X]$.

(i) Доказати да је $R = k[X(X-1), X^2(X-1)]$.

(ii) Израчунати нормализацију прстена R.

3. Нека је k поље и $I = \langle X^2Y, Y^2Z, Z^2X\rangle$ идеал прстена $k[X,Y,Z]$. Доказати да је:

$$\langle X, Y^2\rangle \cap \langle Y, Z^2\rangle \cap \langle Z, X^2\rangle \cap \langle X^2, Y^2, Z^2\rangle$$

примарна декомпозиција идеала I.

4. (i) Нека је X афини варијетет и нека су Y_1, Y_2 афини подваријетети од X. Доказати:

1° $I(Y_1 \cap Y_2) = \sqrt{I(Y_1) + I(Y_2)}$; 2° $I(Y_1 \cup Y_2) = I(Y_1) \cap I(Y_2)$.

(ii) Нека је X неповезан афини варијетет, тј. $X = X_1 \cup X_2$ за неке дисјунктне затворене подскупове $X_1, X_2 \subsetneq X$. Доказати да је $A(X) \cong A(X_1) \times A(X_2)$.

Алгебра 3, Колоквијум 2016. *16. април 2016.*

1. Нека је k поље и $R = \{(Xf + a, a) \mid f \in k[X,Y],\ a \in k\}$ потпрстен од $k[X,Y] \times k$. Доказати да R није Нетерин.

2. Нека је k поље и $R = \{f \in k[X] \mid f(0) = f(1)\}$ потпрстен од $k[X]$.

(i) Доказати да је $R = k[X(X-1), X^2(X-1)]$.

(ii) Израчунати нормализацију прстена R.

3. Нека је k поље и $I = \langle X^2Y, Y^2Z, Z^2X\rangle$ идеал прстена $k[X,Y,Z]$. Доказати да је:

$$\langle X, Y^2\rangle \cap \langle Y, Z^2\rangle \cap \langle Z, X^2\rangle \cap \langle X^2, Y^2, Z^2\rangle$$

примарна декомпозиција идеала I.

4. (i) Нека је X афини варијетет и нека су Y_1, Y_2 афини подваријетети од X. Доказати:

1° $I(Y_1 \cap Y_2) = \sqrt{I(Y_1) + I(Y_2)}$; 2° $I(Y_1 \cup Y_2) = I(Y_1) \cap I(Y_2)$.

(ii) Нека је X неповезан афини варијетет, тј. $X = X_1 \cup X_2$ за неке дисјунктне затворене подскупове $X_1, X_2 \subsetneq X$. Доказати да је $A(X) \cong A(X_1) \times A(X_2)$.