Алгебра, први колоквијум 2007/08. **I група**

1 **[1]** На скупу $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} - \{0\}$ дефинисана је операција $\cdot$ са: $(a,b)\cdot(m,n) = (an+m+n, bn)$. Показати асоцијативност дате операције.

Решење:
$[(a,b)\cdot(m,n)]\cdot(x,y) = (an+m+n, bn)\cdot(x,y) = ((an+m+n)y+x+y, bny) = (any+my+ny+x+y, bny)$
$(a,b)\cdot[(m,n)\cdot(x,y)] = (a,b)\cdot(my+x+y, ny) = (any+my+x+y+ny, bny) = (any+my+ny+x+y, bny)$. □

2 **[1]** Нека је $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} - \{0\} \right\}$. У структури $(A, \cdot)$, где је $\cdot$ операција множења матрица, наћи неутрал и инверз произвољног елемента.

Решење:
Нека су $A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b & b & b \\ b & b & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Тада је $AB = BA = \begin{pmatrix} 2ab & 2ab & 2ab \\ 2ab & 2ab & 2ab \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Узимајући $AB = A$, добијамо $2ab = a$, тј. $b = 1/2$, па је $E = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ неутрал за $\cdot$. Даље узимајући да је $AB = E$, добијамо $2ab = 1/2$, тј. $b = 1/4a$, па је $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4a & 1/4a & 1/4a \\ 1/4a & 1/4a & 1/4a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. □

3 **[1]** Показати да елементи ab и $a^{-1}b^{-1}$ имају исте редове у групи $\mathbb{G}$.

Решење:
Нека је $r(ab) = n, r(a^{-1}b^{-1}) = m$. Како је $(ab)^m a = abab...aba = a(a^{-1}b^{-1}a^{-1}b^{-1}...a^{-1}b^{-1})^{-1} = a((a^{-1}b^{-1})^m)^{-1} = ae = a$, то је због канцелације $(ab)^m = e$, па $n|m$. Како је $(a^{-1}b^{-1})^n a^{-1} = a^{-1}b^{-1}a^{-1}b^{-1}...a^{-1}b^{-1}a^{-1} = a^{-1}(abab...ab)^{-1} = a^{-1}((ab)^n)^{-1} = a^{-1}e = a^{-1}$, то је због канцелације $(a^{-1}b^{-1})^n = e$, па $m|n$. Како $n|m$ и $m|n$, то је $m = n$.
Други начин: $r(ab) = r(ba) = r((ba)^{-1}) = r(a^{-1}b^{-1})$. □

4 **[1]** Нека су у групи $\mathbb{G}$ елементи a, b реда 3 и 4, за које важи $ba = a^2b$. Наћи редове елемената $a^{-1}b$ и ab^{-1}.

Решење:
Према претходном задатку $r(ab^{-1}) = r(a^{-1}(b^{-1})^{-1}) = r(a^{-1}b)$, па је довољно наћи $r(a^{-1}b)$. Како је $a^3 = e$, то је $a^{-1} = a^2$, па тражимо $r(a^2b) = r(ba)$. Имамо $ba \neq e$, $(ba)^2 = baba = baa^2b = b^2 \neq e$. Како је $(ba)^4 = ((ba)^2)^2 = (b^2)^2 = b^4 = e$, то $r(ba)|4$. Како $r(ba) \neq 1, 2$, следи $r(ba) = 4$. Дакле, $r(ab^{-1}) = r(a^{-1}b) = 4$. □

5 **[1]** Показати да је пресликавање $f : UT_1(3, \mathbb{R}) \to (\mathbb{R}, +, 0)$, дато са $g : \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto a$, хомоморфизам група и наћи језгро хомоморфизма f.

Решење:
Нека $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 0 & 1 & c_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in UT_1(3, \mathbb{R})$. Тада

$f\left(\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 0 & 1 & c_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = f\left(\left(\begin{pmatrix} 1 & a+a_1 & b_1+ac_1+b \\ 0 & 1 & c+c_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\right) = a + a_1$ и

$f\left(\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 0 & 1 & c_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = a + a_1$, па је f хомоморфизам. Јасно, $ker f = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : b, c \in \mathbb{R} \right\}$. □

6 **[2]** Нека је $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 7 & 5 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{S}_7$. Одредити $r(f)$, $p(f)$, наћи f^{-1} и ако постоји пермутацију $g \in \mathbb{S}_7$, тако да је $gf = f^{-1}g$.

Решење:
$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 7 & 5 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} = (1452)(37) = (14)(45)(52)(37)$, па је $r(f) =$НЗС$(4, 2) = 4$ и $p(f) = (-1)^4 = 1$. $f^{-1} = ((1452)(37))^{-1} = (37)^{-1}(1452)^{-1} = (37)(1254) = (1254)(37)$. Узмимо $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$, тада $gfg^{-1} = f^{-1}$, тј. $gf = f^{-1}g$. □

7 **[2]** Нека је $\mathbb{G}$ коначна група у којој за фиксиран природан број $n > 1$ важи $(xy)^n = x^n y^n$, за све $x, y \in \mathbb{G}$ и нека је $H = \{x^n : x \in \mathbb{G}\}$. Показати $H \lhd \mathbb{G}$.

Решење:
Нека $a = x^n, b = y^n \in H$. Тада $ab^{-1} = x^n(y^n)^{-1} = x^n(y^{-1})^n = (xy^{-1})^n \in H$, па $H < \mathbb{G}$. Нека је даље $s \in \mathbb{G}$. Тада $s^{-1}as = s^{-1}x^n s = s^{-1}xss^{-1}xs...s^{-1}xs = (s^{-1}xs)^n \in H$, па је $s^{-1}Hs \subseteq H$, одекле је $H \lhd \mathbb{G}$. $\square$

8 **[2]** Ако је H нормална подгрупа групе $\mathbb{G}$ индекса 17, а $a \in \mathbb{G}$ елемент реда 3, да ли $a \in H$? Доказати!

Решење:
Да. У супротном би елемент $aH \neq H$ био реда 3 у групи $\mathbb{G}/H$ ($(aH)^3 = a^3H = H$), која је реда 17, што је у контрадикцији са Лагранжовом теоремом. $\square$

9 **[3]** Ако је a генератор цикличне групе $\mathbb{G}$ реда 18, одредити ред елемента a^7, a^{10}, a^{15}. Одредити број свих генератора групе $\mathbb{G}$, као и по један генератор за сваку њену подгрупу. Колико дата група има аутоморфизама?

Решење:
Како $(7, 18) = 1$, $(10, 18) = 2$, $(15, 18) = 3$, то је $r(a^7) = 18$, $r(a^{10}) = 9$, $r(a^{15}) = 6$. За сваки делилац броја 18 постоји по тачно једна подгрупа тог реда. Оне су $< a >$, $< a^2 >$, $< a^3 >$, $< a^6 >$, $< a^9 >$ и $< e >$, и уочени су њихови генератори. Сви генератори групе $\mathbb{G}$ су облика a^k, где $(k, 18) = 1$. Дакле генератори су a, a^5, a^7, a^{11}, a^{13}, a^{17}. Како је сваки аутоморфизам јединствено дат сликом генератора у генератор, то их има шест. $\square$

10 **[3]** Одредити остатак при дељењу броја 1943^{1942} са 5, 7 и 35. Образложити!

Решење:
Користимо Фермаову теорему. Како $1942 = 4 \cdot 485 + 2$, то је $1943^{1942} =_5 3^{4 \cdot 485 + 2} =_5 (3^4)^{485} 3^2 =_5 9 =_5 4$. Како $1942 = 6 \cdot 323 + 4$, то је $1943^{1942} =_7 4^{6 \cdot 323 + 4} =_7 (4^6)^{323} 4^4 =_7 16 \cdot 16 =_7 2 \cdot 2 =_7 4$. Како $(5, 7) = 1$, то $1943^{1942} =_{35} 4$. $\square$

11 **[1]** Навести Лагранжову теорему.
[2] Доказати Лагранжову теорему.

Алгебра, први колоквијум 2007/08. **II група**

1 **[1]** На скупу $\mathbb{R}\times\mathbb{R}-\{(0,0)\}$ дефинисана је операција $\cdot$ са: $(a,b)\cdot(m,n)=(am-bn,an+bm)$. Показати асоцијативност дате операције.

Решење:
$[(a,b)\cdot(m,n)]\cdot(x,y)=(am-bn,an+bm)\cdot(x,y)=(amx-bnx-any-bmy,amy-bny+anx+bmx)$
$(a,b)\cdot[(m,n)\cdot(x,y)]=(a,b)\cdot(mx-ny,my+nx)=(amx-any-bmy-bnx,amy+anx+bmx-bny)$. □

2 **[1]** Нека је $A=\left\{\begin{pmatrix} a & a & a\\ 0 & 0 & 0\\ a & a & a\end{pmatrix}\ :\ a\in\mathbb{R}-\{0\}\right\}$. У структури $(A,\cdot)$, где је $\cdot$ операција множења матрица, наћи неутрал и инверз произвољног елемента.

Решење:
Нека су $A=\begin{pmatrix} a & a & a\\ 0 & 0 & 0\\ a & a & a\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} b & b & b\\ 0 & 0 & 0\\ b & b & b\end{pmatrix}$. Тада је $AB=BA=\begin{pmatrix} 2ab & 2ab & 2ab\\ 0 & 0 & 0\\ 2ab & 2ab & 2ab\end{pmatrix}$. Узимајући $AB=A$, добијамо $2ab=a$, тј. $b=1/2$, па је $E=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 0 & 0\\ 1/2 & 1/2 & 1/2\end{pmatrix}$ неутрал за $\cdot$. Даље узимајући да је $AB=E$, добијамо $2ab=1/2$, тј. $b=1/4a$, па је $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1/4a & 1/4a & 1/4a\\ 0 & 0 & 0\\ 1/4a & 1/4a & 1/4a\end{pmatrix}$. □

3 **[1]** Показати да елементи $a^{-1}b$ и ab^{-1} имају исте редове у групи $\mathbb{G}$.

Решење:
Нека је $r(a^{-1}b)=n, r(ab^{-1})=m$. Како је $(a^{-1}b)^m a^{-1}=a^{-1}ba^{-1}b...a^{-1}ba^{-1}=a^{-1}(ab^{-1}ab^{-1}...ab^{-1})^{-1}=a^{-1}((ab^{-1})^m)^{-1}=a^{-1}e=a^{-1}$, то је због канцелације $(a^{-1}b)^m=e$, па $n|m$. Како је $(ab^{-1})^n a=ab^{-1}ab^{-1}...ab^{-1}a=a(a^{-1}ba^{-1}b...a^{-1}b)^{-1}=a((a^{-1}b)^n)^{-1}=ae=a$,то је због канцелације $(ab^{-1})^n=e$, па $m|n$. Како $n|m$ и $m|n$, то је $m=n$.
Други начин: $r(a^{-1}b)=r(ba^{-1})=r((ba^{-1})^{-1})=r(ab^{-1})$. □

4 **[1]** Нека су у групи $\mathbb{G}$ елементи a,b реда 3 и 4, за које важи $ba=a^2b$. Наћи редове елемената ab и $a^{-1}b^{-1}$.

Решење:
Према претходном задатку $r(ab)=r((a^{-1})^{-1}b)=r(a^{-1}b^{-1})$, па је довољно наћи $r(ab)$. Имамо $ab\neq e$, $(ab)^2=abab=aa^2bb=b^2\neq e$. Како је $(ab)^4=((ab)^2)^2=(b^2)^2=b^4=e$, то $r(ab)|4$. Како $r(ab)\neq 1,2$, следи $r(ab)=4$. Дакле, $r(ab)=r(a^{-1}b^{-1})=4$. □

5 **[1]** Показати да је пресликавање $f: UT_1(3,\mathbb{R})\to(\mathbb{R},+,0)$, дато са $g:\begin{pmatrix} 1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\mapsto c$, хомоморфизам група и наћи језгро хомоморфизма f.

Решење:
Нека $\begin{pmatrix} 1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & a_1 & b_1\\ 0 & 1 & c_1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\in UT_1(3,\mathbb{R})$. Тада
$f\left(\begin{pmatrix} 1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a_1 & b_1\\ 0 & 1 & c_1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)=f\left(\begin{pmatrix} 1 & a+a_1 & b_1+ac_1+b\\ 0 & 1 & c+c_1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)=c+c_1$ и
$f\left(\begin{pmatrix} 1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)+f\left(\begin{pmatrix} 1 & a_1 & b_1\\ 0 & 1 & c_1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)=c+c_1$, па је f хомоморфизам. Јасно, $kerf=\left\{\begin{pmatrix} 1 & a & b\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\ :\ a,b\in\mathbb{R}\right\}$. □

6 **[2]** Нека је $f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ 4 & 1 & 7 & 5 & 2 & 6 & 8 & 3\end{pmatrix}\in\mathbb{S}_8$. Одредити $r(f)$, $p(f)$, наћи f^{-1} и ако постоји пермутацију $g\in\mathbb{S}_8$, тако да је $gf=f^{-1}g$.

Решење:
$f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ 4 & 1 & 7 & 5 & 2 & 6 & 8 & 3\end{pmatrix}=(1452)(378)=(14)(45)(52)(37)(78)$, па је $r(f)=$НЗС$(4,3)=12$ и $p(f)=(-1)^5=-1$.
$f^{-1}=((1452)(378))^{-1}=(378)^{-1}(1452)^{-1}=(387)(1254)=(1254)(387)$. Узмимо $g=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 6 & 8 & 7\end{pmatrix}$, тада $gfg^{-1}=f^{-1}$, тј. $gf=f^{-1}g$. □

7 **[2]** Нека је $\mathbb{G}$ коначна група у којој за фиксиран природан број $n > 1$ важи $(xy)^n = x^n y^n$, за све $x, y \in \mathbb{G}$ и нека је $H = \{x \in \mathbb{G} \,:\, x^n = e\}$. Показати $H \lhd \mathbb{G}$.

Решење:
Нека $a, b \in H$. Тада $a^n = b^n = e$ и имамо $(ab^{-1})^n = a^n (b^{-1})^n = e$, па $ab^{-1} \in H$, одакле $H < \mathbb{G}$. Нека је даље $s \in \mathbb{G}$. Тада $(s^{-1}as)^n = s^{-1}ass^{-1}as...s^{-1}as = s^{-1}a^n s = s^{-1}es = e$, па $s^{-1}as \in H$. Одатле $s^{-1}Hs \subseteq H$, тј. $H \lhd \mathbb{G}$. □

8 **[2]** Ако је H нормална подгрупа групе $\mathbb{G}$ индекса 13, а $a \in \mathbb{G}$ елемент реда 7, да ли $a \in H$? Доказати!

Решење:
Да. У супротном би елемент $aH \neq H$ био реда 7 у групи $\mathbb{G}/H$ ($(aH)^7 = a^7 H = H$), која је реда 13, што је у контрадикцији са Лагранжовом теоремом. □

9 **[3]** Ако је a генератор цикличне групе $\mathbb{G}$ реда 20, одредити ред елемента a^7, a^{14}, a^{15}. Одредити број свих генератора групе $\mathbb{G}$, као и по један генератор за сваку њену подгрупу. Колико дата група има аутоморфизама?

Решење:
Како $(7, 20) = 1$, $(14, 20) = 2$, $(15, 20) = 5$, то је $r(a^7) = 20$, $r(a^{14}) = 10$, $r(a^{15}) = 4$. За сваки делилац броја 20 постоји по тачно једна подгрупа тог реда. Оне су $< a >$, $< a^2 >$, $< a^4 >$, $< a^5 >$, $< a^{10} >$ и $< e >$, и уочени су њихови генератори. Сви генератори групе $\mathbb{G}$ су облика a^k, где $(k, 20) = 1$. Дакле генератори су a, a^3, a^7, a^9, a^{11}, a^{13}, a^{17}, a^{19}. Како је сваки аутоморфизам јединствено дат сликом генератора у генератор, то их има осам. □

10 **[3]** Одредити остатак при дељењу броја 1942^{1939} са 5, 7 и 35. Образложити!

Решење:
Користимо Фермаову теорему. Како $1939 = 4 \cdot 484 + 3$, то је $1942^{1939} =_5 2^{4 \cdot 484 + 3} =_5 (2^4)^{484} 2^3 =_5 8 =_5 3$. Како $1939 = 6 \cdot 323 + 1$, то је $1942^{1939} =_7 3^{6 \cdot 323 + 1} =_7 (3^6)^{323} 3^1 =_7 3$. Како $(5, 7) = 1$, то $1942^{1939} =_{35} 3$. □

11 **[1]** Навести Лагранжову теорему.
[2] Доказати Лагранжову теорему.

Славко Моцоња
slavkomm@gmail.com
http://www.matf.bg.ac.yu/~slavko