Алгебра, први колоквијум *18. април 2010.*

1. На скупу $G = \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$ задата је операција $*$ на следећи начин : $(a,b)*(c,d) = (ac, ad+bc)$.
   (а) Доказати да је $(G,*)$ група. Испитати да ли је Абелова.
   (б) Нека су $H = \{(1,2m) : m \in \mathbb{Z}\}$ и $K = \{(1,\frac{m}{2}) : m \in \mathbb{Z}\}$. Испитати да ли су H, K и $H \cup K$ подгрупе групе $(G,*)$.
   (в) Да ли је са $f(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ дефинисан изоморфизам групе $(G,*)$ на групу $(M,\cdot)$ где је $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} : a,b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\}$ а операција $\cdot$ је множење матрица?
2. (а) Нека су $f : \mathbb{G} \to \mathbb{H}$ и $g : \mathbb{G} \to \mathbb{H}$ хомоморфизми група. Доказати да је $K = \{x \in \mathbb{G} : f(x) = g(x)\}$ подгрупа групе $\mathbb{G}$.
   (б) Нека је $\mathbb{G}$ група и нека је пресликавање $f : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ задато са $f(x) = x^{-1}$ за свако x из $\mathbb{G}$. Под којим условом је f хомоморфизам?
3. (а) У цикличној групи $\mathbb{C}_{16}$ генерисаној елементом a одредити ред елемената a^5, a^{10} и a^{12}.
   Одредити све генераторе групе.
   Одредити број аутоморфизама групе $\mathbb{C}_{16}$. Образложити одговор.
   (б) Када коначна циклична група $\mathbb{C}_n$ има тачно једну праву подгрупу? Образложити одговор.
4. Одредити ред сваког елемента диедарске групе $\mathbb{D}_5$. Наћи све подгрупе групе $\mathbb{D}_5$.
5. Теоријско питање: Хомоморфизми

Алгебра, први колоквијум *18. април 2010.*

1. На скупу $G = \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$ задата је операција $*$ на следећи начин : $(a,b)*(c,d) = (ac, ad+bc)$.
   (а) Доказати да је $(G,*)$ група. Испитати да ли је Абелова.
   (б) Нека су $H = \{(1,2m) : m \in \mathbb{Z}\}$ и $K = \{(1,\frac{m}{2}) : m \in \mathbb{Z}\}$. Испитати да ли су H, K и $H \cup K$ подгрупе групе $(G,*)$.
   (в) Да ли је са $f(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ дефинисан изоморфизам групе $(G,*)$ на групу $(M,\cdot)$ где је $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} : a,b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\}$ а операција $\cdot$ је множење матрица?
2. (а) Нека су $f : \mathbb{G} \to \mathbb{H}$ и $g : \mathbb{G} \to \mathbb{H}$ хомоморфизми група. Доказати да је $K = \{x \in \mathbb{G} : f(x) = g(x)\}$ подгрупа групе $\mathbb{G}$.
   (б) Нека је $\mathbb{G}$ група и нека је пресликавање $f : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ задато са $f(x) = x^{-1}$ за свако x из $\mathbb{G}$. Под којим условом је f хомоморфизам?
3. (а) У цикличној групи $\mathbb{C}_{16}$ генерисаној елементом a одредити ред елемената a^5, a^{10} и a^{12}.
   Одредити све генераторе групе.
   Одредити број аутоморфизама групе $\mathbb{C}_{16}$. Образложити одговор.
   (б) Када коначна циклична група $\mathbb{C}_n$ има тачно једну праву подгрупу? Образложити одговор.
4. Одредити ред сваког елемента диедарске групе $\mathbb{D}_5$. Наћи све подгрупе групе $\mathbb{D}_5$.
5. Теоријско питање: Хомоморфизми