Алгебра 2008/2009, други колоквијум, група А *16. мај 2009.*

1. Нека је G група. За свако $a \in G$ дефинишемо пресликавање $\sigma_a : G \to G$ са $\sigma_a(x) = a\,x\,a^{-1}$. Зна се да су σ_a аутоморфизми групе G и да је скуп $\mathrm{Inn}(G) = \{\sigma_a \mid a \in G\}$ група у односу на операцију композиције функција.
   (а) Показати једнакост: $\sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_{ab}$.
   (б) Ако је $f \in \mathrm{Aut}(G)$, показати једнакост: $f^{-1} \circ \sigma_a \circ f = \sigma_{f^{-1}(a)}$.
   (в) Ако је $\phi : G \to \mathrm{Inn}(G)$ пресликавање дато са $\phi(a) = \sigma_a$, показати да је ϕ епиморфизам група.
   (г) Показати да је $\mathrm{Ker}(\phi) = \mathrm{Z}(G)$. (Са $\mathrm{Z}(G)$ је означен центар групе G.)

Алгебра 2008/2009, други колоквијум, група А *16. мај 2009.*

1. Нека је G група. За свако $a \in G$ дефинишемо пресликавање $\sigma_a : G \to G$ са $\sigma_a(x) = a\,x\,a^{-1}$. Зна се да су σ_a аутоморфизми групе G и да је скуп $\mathrm{Inn}(G) = \{\sigma_a \mid a \in G\}$ група у односу на операцију композиције функција.
   (а) Показати једнакост: $\sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_{ab}$.
   (б) Ако је $f \in \mathrm{Aut}(G)$, показати једнакост: $f^{-1} \circ \sigma_a \circ f = \sigma_{f^{-1}(a)}$.
   (в) Ако је $\phi : G \to \mathrm{Inn}(G)$ пресликавање дато са $\phi(a) = \sigma_a$, показати да је ϕ епиморфизам група.
   (г) Показати да је $\mathrm{Ker}(\phi) = \mathrm{Z}(G)$. (Са $\mathrm{Z}(G)$ је означен центар групе G.)

Алгебра 2008/2009, други колоквијум, група Б *16. мај 2009.*

1. Нека је G група. За свако $a \in G$ дефинишемо пресликавање $\tau_a : G \to G$ са $\tau_a(x) = a^{-1}\,x\,a$. Зна се да су τ_a аутоморфизми групе G и да је скуп $\mathrm{Inn}(G) = \{\tau_a \mid a \in G\}$ група у односу на операцију композиције функција.
   (а) Показати једнакост: $\tau_a \circ \tau_b = \tau_{ba}$.
   (б) Ако је $f \in \mathrm{Aut}(G)$, показати једнакост: $f \circ \tau_a \circ f^{-1} = \tau_{f(a)}$.
   (в) Ако је $\phi : G \to \mathrm{Inn}(G)$ пресликавање дато са $\phi(a) = \tau_{a^{-1}}$, показати да је ϕ епиморфизам група.
   (г) Показати да је $\mathrm{Ker}(\phi) = \mathrm{Z}(G)$. (Са $\mathrm{Z}(G)$ је означен центар групе G.)

Алгебра 2008/2009, други колоквијум, група Б *16. мај 2009.*

1. Нека је G група. За свако $a \in G$ дефинишемо пресликавање $\tau_a : G \to G$ са $\tau_a(x) = a^{-1}\,x\,a$. Зна се да су τ_a аутоморфизми групе G и да је скуп $\mathrm{Inn}(G) = \{\tau_a \mid a \in G\}$ група у односу на операцију композиције функција.
   (а) Показати једнакост: $\tau_a \circ \tau_b = \tau_{ba}$.
   (б) Ако је $f \in \mathrm{Aut}(G)$, показати једнакост: $f \circ \tau_a \circ f^{-1} = \tau_{f(a)}$.
   (в) Ако је $\phi : G \to \mathrm{Inn}(G)$ пресликавање дато са $\phi(a) = \tau_{a^{-1}}$, показати да је ϕ епиморфизам група.
   (г) Показати да је $\mathrm{Ker}(\phi) = \mathrm{Z}(G)$. (Са $\mathrm{Z}(G)$ је означен центар групе G.)

2. (а) Наћи опште решење Диофантове једначине: $1560\,x + 5145\,y = -30$.

(б) Израчунати остатак при дељењу 2002^{1988} са 153.

3. Дате су пермутације $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 1 & 6 & 9 & 10 & 7 & 2 & 4 & 8 & 5 \end{pmatrix}$, $g = (2,9,10,7)(2,4,8,3)(10,1,5,9)(8,6,4)$ и $h = (2,9,10,7)(1,2,8)(10,3,5,9) \in S_{10}$. Наћи њихову циклусну декомпозицију, одредити ред и парност, и ако постоје, одредити пермутације σ и τ тако да је $g = \sigma^{-1} f \sigma$ и $h = \tau^{-1} f \tau$.

2. (а) Наћи опште решење Диофантове једначине: $1560\,x + 5145\,y = -30$.

(б) Израчунати остатак при дељењу 2002^{1988} са 153.

3. Дате су пермутације $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 1 & 6 & 9 & 10 & 7 & 2 & 4 & 8 & 5 \end{pmatrix}$, $g = (2,9,10,7)(2,4,8,3)(10,1,5,9)(8,6,4)$ и $h = (2,9,10,7)(1,2,8)(10,3,5,9) \in S_{10}$. Наћи њихову циклусну декомпозицију, одредити ред и парност, и ако постоје, одредити пермутације σ и τ тако да је $g = \sigma^{-1} f \sigma$ и $h = \tau^{-1} f \tau$.

2. (а) Наћи опште решење Диофантове једначине: $4410\,x + 2618\,y = 28$.

(б) Израчунати остатак при дељењу 2707^{1988} са 153.

3. Дате су пермутације $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 10 & 2 & 6 & 9 & 4 & 8 & 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, $g = (2,6,8,7)(1,3,6,10)(7,4,9,8)(1,5,10)$ и $h = (2,9,10,7)(1,2,8)(10,3,5,9) \in S_{10}$. Наћи њихову циклусну декомпозицију, одредити ред и парност, и ако постоје, одредити пермутације σ и τ тако да је $g = \sigma^{-1} f \sigma$ и $h = \tau^{-1} f \tau$.

2. (а) Наћи опште решење Диофантове једначине: $4410\,x + 2618\,y = 28$.

(б) Израчунати остатак при дељењу 2707^{1988} са 153.

3. Дате су пермутације $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 10 & 2 & 6 & 9 & 4 & 8 & 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, $g = (2,6,8,7)(1,3,6,10)(7,4,9,8)(1,5,10)$ и $h = (2,9,10,7)(1,2,8)(10,3,5,9) \in S_{10}$. Наћи њихову циклусну декомпозицију, одредити ред и парност, и ако постоје, одредити пермутације σ и τ тако да је $g = \sigma^{-1} f \sigma$ и $h = \tau^{-1} f \tau$.