Алгебра, додатни рок 2009. *28. септембар 2009.*

1. 1. На скупу $R_{-1} = \mathbb{R} - \{-1\}$ дата је операција $\star$ са $a \star b = ab + a + b$.

   (а) Показати да је алгебра $(R_{-1}, \star)$ група? Такође испитати комутативност операције $\star$.

   (б) Показати да је пресликавање f, задато са $f(a) = -1 + \dfrac{1}{1+a}$, аутоморфизам групе R_{-1}.

1. 2. Нека је a генератор цикличне групе C_{20}.

   (а) Написати све елементе групе C_{20} и одредити њихове редове. Колико група C_{20} има генератора?

   (б) Да ли постоји ендоморфизам f групе C_{20} за који је $f(a^6) = a^5$? Образложити.

   (в) Да ли постоји аутоморфизам g групе C_{20} за који је $g(a^6) = a^{10}$? Образложити.

2. 1. Посматрамо групу $\mathbb{Q} = (Q, +, 0)$. Нека је за $a \neq 0$, $f_a : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ пресликавање дато са $f_a(x) = ax$, и нека је $G = \{f_a \mid a \in \mathbb{Q},\, a \neq 0\}$.

   (а) Показати да је $G < \operatorname{Aut}\mathbb{Q}$.

   (б) Показати да је $G = \operatorname{Aut}\mathbb{Q}$.

   (в) Показати да је $\operatorname{Aut}\mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}^\star$, где је $\mathbb{Q}^\star = (Q - \{0\}, \cdot, 1)$.

2. 2. Одредити остатак при дељењу броја 1006^{2009} са бројем 315.

2. 3. Нека је у S_9 $f = (3,5,7)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 2 & 1 & 4 & 5 & 6 & 7 & 9 & 3 \end{pmatrix}(6,8,3,9)(2,4,6)$. Одредити циклусну декомпозицију, ред и парност пермутације f, наћи f^{-1} и ако постоји пермутацију $g \in S_9$, тако да је $gf = f^{-1}g$.

3. 1. (а) Одредити елементарну и нормалну форму групе $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{60} \times \mathbb{Z}_{90}$, одредити који је максималан ред елемента у њој и колико има елемената максималног реда.

   (б) Абелова група G је генерисана елементима a, b, c за које важе дате релације. Одредити нормалну форму групе G.
   $$\begin{aligned} 6a - 9b + 5c &= 0 \\ -5a + 10b - 5c &= 0 \\ 4a - 11b + 5c &= 0 \end{aligned}$$

3. 2. На скупу $P = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ су задате операције $+$ и $\cdot$ на уобичајен начин: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(fg)(x) = f(x)g(x)$.

   (а) Показати да је алгебра $(P, +, \cdot)$ комутативан прстен са јединицом.

   (б) Показати да је скуп $I = \{f \in P \mid f(0) = 0\}$ идеал од P.

   (в) Да ли је I прост, односно максималан идеал?

3. 3. Нека је $\alpha = \sqrt{1+i}$. Одредити димензију векторског простора $\mathbb{Q}(\alpha)$ над $\mathbb{Q}$ и уочити једну базу за њега. Представити елемент $\dfrac{1}{\alpha^2 + \alpha + 1}$ у уоченој бази.

3. 4. Нека је $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$.

   (а) Показати да је $f(x)$ несводљив над $\mathbb{Z}_3$.

   (б) Колико има елемената у пољу $\big(\mathbb{Z}_3[x]\big)_f$?

   (в) Израчунати инверз од $x+1$ у $\big(\mathbb{Z}_3[x]\big)_f$.