Испит из Алгебре, Јануар 1, И смер

21. јануар 2015.

1. Нека је $SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \,:\, ad - bc = 1 \right\}$.

а) [3] Доказати да је $SL_2(\mathbb{Z})$ група у односу на множење матрица.

б) [7] Ако је $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ одредити редове елемената A, B, AB и BA у $SL_2(\mathbb{Z})$.

2. [8] Нека је циклична група H нормална подгрупа групе G. Доказати да је свака подгрупа групе H нормална подгрупа групе G.

3. Нека је G комутативна група задата генераторима x_1, x_2, x_3 и релацијама

$$\begin{aligned} 4x_1 + 8x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 8x_1 + 16x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 8x_1 - 8x_2 - 18x_3 &= 0. \end{aligned}$$

а) [7] Одредити нормалну и елементарну форму групе G.

б) [3] Одредити број елемената реда 12 у групи G.

4. а) [3] Одредити примитивни корен по модулу 11.

б) [7] Коришћењем дела под а) решити сваку од следећих конгруенција

$$x^4 \equiv 8 \pmod{11}, \qquad x^6 \equiv 5 \pmod{11}, \qquad x^7 \equiv 7 \pmod{11}.$$

5. [12] Нека је K коренско поље полинома $f(X) = X^4 - 7X^2 + 10$. Одредите неки елемент $\alpha \in \mathbb{C}$ такав да је $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ и минимални полином елемента α над $\mathbb{Q}$. Напишите $\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}$ у облику $p(\alpha)$ за неки полином $p(X) \in \mathbb{Q}[X]$.

Испит из Алгебре, Јануар 1, И смер

21. јануар 2015.

1. Нека је $SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \,:\, ad - bc = 1 \right\}$.

а) [3] Доказати да је $SL_2(\mathbb{Z})$ група у односу на множење матрица.

б) [7] Ако је $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ одредити редове елемената A, B, AB и BA у $SL_2(\mathbb{Z})$.

2. [8] Нека је циклична група H нормална подгрупа групе G. Доказати да је свака подгрупа групе H нормална подгрупа групе G.

3. Нека је G комутативна група задата генераторима x_1, x_2, x_3 и релацијама

$$\begin{aligned} 4x_1 + 8x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 8x_1 + 16x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 8x_1 - 8x_2 - 18x_3 &= 0. \end{aligned}$$

а) [7] Одредити нормалну и елементарну форму групе G.

б) [3] Одредити број елемената реда 12 у групи G.

4. а) [3] Одредити примитивни корен по модулу 11.

б) [7] Коришћењем дела под а) решити сваку од следећих конгруенција

$$x^4 \equiv 8 \pmod{11}, \qquad x^6 \equiv 5 \pmod{11}, \qquad x^7 \equiv 7 \pmod{11}.$$

5. [12] Нека је K коренско поље полинома $f(X) = X^4 - 7X^2 + 10$. Одредите неки елемент $\alpha \in \mathbb{C}$ такав да је $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ и минимални полином елемента α над $\mathbb{Q}$. Напишите $\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}$ у облику $p(\alpha)$ за неки полином $p(X) \in \mathbb{Q}[X]$.