

1. [8] Свакој пермутацији $\pi \in \mathbb{S}_n$ придружимо пермутацију $\pi_* \in \mathbb{S}_{n+2}$ на следећи начин: $\pi_*(i) = \pi(i)$, за $1 \leq i \leq n$, док је $\pi_*(n+1) = n+1$ и $\pi_*(n+2) = n+2$ уколико је π парна пермутација, а $\pi_*(n+1) = n+2$ и $\pi_*(n+2) = n+1$ уколико је π непарна пермутација. Доказати да придруживање $\pi \mapsto \pi_*$ представља хомоморфизам групе \mathbb{S}_n у групу \mathbb{A}_{n+2} .

2. [10] Подгрупа $G = \langle (178), (34)(25) \rangle$ групе \mathbb{S}_8 дејствује на скуп $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Одредити орбиту и стабилизатор сваког елемента скупа X при овом дејству.

3. Нека је G комутативна група задата генераторима x_1, x_2, x_3 и релацијама

$$\begin{aligned} 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -12x_1 + 6x_2 - 12x_3 &= 0 \\ 14x_1 - 8x_2 + 10x_3 &= 0. \end{aligned}$$

а) [7] Одредити нормалну и елементарну форму групе G .

б) [3] Одредити све (неизоморфне) комутативне групе реда $|G|$.

4. [10] Решити систем конгруенција

$$\begin{aligned} 2x &\equiv 3 \pmod{7} \\ 3x &\equiv 1 \pmod{11} \\ 5x &\equiv 2 \pmod{9}. \end{aligned}$$

5. [12] Нека је K коренско поље полинома $f(X) = X^4 - 24X^2 + 4$. Одредите неки елемент $\alpha \in \mathbb{C}$ такав да је $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ и минимални полином елемента α над \mathbb{Q} . Напишите $\frac{1}{\alpha^2 + 2}$ у облику $p(\alpha)$ за неки полином $p(X) \in \mathbb{Q}[X]$.

1. [8] Свакој пермутацији $\pi \in \mathbb{S}_n$ придружимо пермутацију $\pi_* \in \mathbb{S}_{n+2}$ на следећи начин: $\pi_*(i) = \pi(i)$, за $1 \leq i \leq n$, док је $\pi_*(n+1) = n+1$ и $\pi_*(n+2) = n+2$ уколико је π парна пермутација, а $\pi_*(n+1) = n+2$ и $\pi_*(n+2) = n+1$ уколико је π непарна пермутација. Доказати да придруживање $\pi \mapsto \pi_*$ представља хомоморфизам групе \mathbb{S}_n у групу \mathbb{A}_{n+2} .

2. [10] Подгрупа $G = \langle (178), (34)(25) \rangle$ групе \mathbb{S}_8 дејствује на скуп $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Одредити орбиту и стабилизатор сваког елемента скупа X при овом дејству.

3. Нека је G комутативна група задата генераторима x_1, x_2, x_3 и релацијама

$$\begin{aligned} 10x_1 - 4x_2 - 12x_3 &= 0 \\ -20x_1 + 14x_2 + 30x_3 &= 0 \\ -12x_1 + 6x_2 + 18x_3 &= 0. \end{aligned}$$

а) [7] Одредити нормалну и елементарну форму групе G .

б) [3] Одредити све (неизоморфне) комутативне групе реда $|G|$.

4. [10] Решити систем конгруенција

$$\begin{aligned} 2x &\equiv 1 \pmod{7} \\ 3x &\equiv 4 \pmod{11} \\ 5x &\equiv 3 \pmod{9}. \end{aligned}$$

5. [12] Нека је K коренско поље полинома $f(X) = X^4 - 24X^2 + 4$. Одредите неки елемент $\alpha \in \mathbb{C}$ такав да је $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ и минимални полином елемента α над \mathbb{Q} . Напишите $\frac{1}{\alpha^2 + 2}$ у облику $p(\alpha)$ за неки полином $p(X) \in \mathbb{Q}[X]$.