Испит из Алгебре, Јун 1, И смер *22. јун 2014.*

1. Нека је $R_2 = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ и $\star$ дефинисано са $a \star b = ab - 2a - 2b + 6$, за све $a, b \in R_2$.

а) [5] Доказати да је $(R_2, \star)$ група.

б) [5] Доказати да је пресликавање $f : R_2 \to R_2$, задато са $f(a) = \dfrac{1}{(a-2)^3} + 2$, изоморфизам.

2. [8] Нека је n дати природан број и G група таква да за све $x, y \in G$ важи $(xy)^n = x^n y^n$. Доказати да је $H = \{z \in G \mid z^n = e\}$ нормална подгрупа од G (e је неутрал групе G).

3. Нека је G комутативна група задата генераторима x_1, x_2, x_3 и релацијама

$$\begin{aligned} 10x_1 - 4x_2 - 12x_3 &= 0 \\ -20x_1 + 14x_2 + 30x_3 &= 0 \\ -12x_1 + 6x_2 + 18x_3 &= 0. \end{aligned}$$

а) [7] Одредити нормалну и елементарну форму групе G.

б) [3] Одредити број елемената реда 12 групе G.

4. а) [3] Одредити примитивни корен по модулу 13.

б) [7] Коришћењем дела под а) решити сваку од следећих конгруенција

$$x^7 \equiv 3 \pmod{13}, \qquad x^8 \equiv 3 \pmod{13}, \qquad x^4 \equiv 4 \pmod{13}.$$

5. [12] Нека је K коренско поље полинома $f(X) = X^4 + 2X^2 - 15$. Одредите неки елемент $\alpha \in \mathbb{C}$ такав да је $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ и минимални полином елемента α над $\mathbb{Q}$. Напишите $\dfrac{1}{\alpha^2 + \alpha}$ у облику $p(\alpha)$ за неки полином $p(X) \in \mathbb{Q}[X]$.

Испит из Алгебре, Јун 1, И смер *22. јун 2014.*

1. Нека је $R_2 = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ и $\star$ дефинисано са $a \star b = ab - 2a - 2b + 6$, за све $a, b \in R_2$.

а) [5] Доказати да је $(R_2, \star)$ група.

б) [5] Доказати да је пресликавање $f : R_2 \to R_2$, задато са $f(a) = \dfrac{1}{(a-2)^3} + 2$, изоморфизам.

2. [8] Нека је n дати природан број и G група таква да за све $x, y \in G$ важи $(xy)^n = x^n y^n$. Доказати да је $H = \{z \in G \mid z^n = e\}$ нормална подгрупа од G (e је неутрал групе G).

3. Нека је G комутативна група задата генераторима x_1, x_2, x_3 и релацијама

$$\begin{aligned} 10x_1 - 4x_2 - 12x_3 &= 0 \\ -20x_1 + 14x_2 + 30x_3 &= 0 \\ -12x_1 + 6x_2 + 18x_3 &= 0. \end{aligned}$$

а) [7] Одредити нормалну и елементарну форму групе G.

б) [3] Одредити број елемената реда 12 групе G.

4. а) [3] Одредити примитивни корен по модулу 13.

б) [7] Коришћењем дела под а) решити сваку од следећих конгруенција

$$x^7 \equiv 3 \pmod{13}, \qquad x^8 \equiv 3 \pmod{13}, \qquad x^4 \equiv 4 \pmod{13}.$$

5. [12] Нека је K коренско поље полинома $f(X) = X^4 + 2X^2 - 15$. Одредите неки елемент $\alpha \in \mathbb{C}$ такав да је $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ и минимални полином елемента α над $\mathbb{Q}$. Напишите $\dfrac{1}{\alpha^2 + \alpha}$ у облику $p(\alpha)$ за неки полином $p(X) \in \mathbb{Q}[X]$.