Алгебра 2011/2012, колоквијум (И смер) *11.04.2012.*

1. а) Нека је M скуп непарних природних бројева. Доказати да је са $a \star b = a + b + ab$ задата операција на скупу M. Да ли је ова операција комутативна и да ли је асоцијативна?

б) На скупу природних бројева $\mathbf{N}$ дефинисана је операција t са $t(a, b, c) = a^{b^c}$, за све $a, b, c \in \mathbf{N}$. Доказати да $\equiv \pmod 2$ јесте, а $\equiv \pmod 3$ није конгруенција алгебре (N, t).

в) На скупу $G = \mathbf{R} \setminus \{0\} \times \mathbf{R}$, где је $\mathbf{R}$ скуп реалних бројева, дефинисана је операција $\star$ на следећи начин $(a, b) \star (c, d) = (ac, ad + bc)$. Уколико је $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \mid a, b \in R, a \neq 0 \right\}$ и $\cdot$ множење матрица, доказати да је $\cdot$ операција на скупу S и да је са $f(a, b) = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$ дат морфизам алгебре $(G, \star)$ у $(S, \cdot)$.

2. Дате су пермутације $\sigma : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 1 & 6 & 5 & 4 & 3 & 8 & 9 & 2 \end{pmatrix}$ и $\pi = (1578)(2563)(423)(19)$.

а) Представити пермутације σ, $\pi^{-1}\sigma$ и $\sigma^{-1}\pi\sigma$ као производ дисјунктних циклуса и одредити им редове.

б) Одредити σ^{2011}, $(\pi^{-1}\sigma)^{2012}$ и $(\sigma^{-1}\pi\sigma)^{2013}$.

3. Испитати које су од следећих група изоморфне

$$\mathbb{Z}_{12}, \quad \mathbb{S}_3 \times \mathbb{Z}_2, \quad \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_4, \quad \mathbb{S}_3 \times \mathbb{Z}_8, \quad \mathbb{S}_4 \times \mathbb{Z}_2, \quad \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4, \quad \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{D}_8, \quad \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_8, \quad \mathbb{D}_6, \quad \mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_2.$$

Алгебра 2011/2012, колоквијум (И смер) *11.04.2012.*

1. а) Нека је M скуп непарних природних бројева. Доказати да је са $a \star b = a + b + ab$ задата операција на скупу M. Да ли је ова операција комутативна и да ли је асоцијативна?

б) На скупу природних бројева $\mathbf{N}$ дефинисана је операција t са $t(a, b, c) = a^{b^c}$, за све $a, b, c \in \mathbf{N}$. Доказати да $\equiv \pmod 2$ јесте, а $\equiv \pmod 3$ није конгруенција алгебре (N, t).

в) На скупу $G = \mathbf{R} \setminus \{0\} \times \mathbf{R}$, где је $\mathbf{R}$ скуп реалних бројева, дефинисана је операција $\star$ на следећи начин $(a, b) \star (c, d) = (ac, ad + bc)$. Уколико је $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \mid a, b \in R, a \neq 0 \right\}$ и $\cdot$ множење матрица, доказати да је $\cdot$ операција на скупу S и да је са $f(a, b) = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$ дат морфизам алгебре $(G, \star)$ у $(S, \cdot)$.

2. Дате су пермутације $\sigma : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 1 & 6 & 5 & 4 & 3 & 8 & 9 & 2 \end{pmatrix}$ и $\pi = (1578)(2563)(423)(19)$.

а) Представити пермутације σ, $\pi^{-1}\sigma$ и $\sigma^{-1}\pi\sigma$ као производ дисјунктних циклуса и одредити им редове.

б) Одредити σ^{2011}, $(\pi^{-1}\sigma)^{2012}$ и $(\sigma^{-1}\pi\sigma)^{2013}$.

3. Испитати које су од следећих група изоморфне

$$\mathbb{Z}_{12}, \quad \mathbb{S}_3 \times \mathbb{Z}_2, \quad \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_4, \quad \mathbb{S}_3 \times \mathbb{Z}_8, \quad \mathbb{S}_4 \times \mathbb{Z}_2, \quad \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4, \quad \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{D}_8, \quad \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_8, \quad \mathbb{D}_6, \quad \mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_2.$$