Алгебра, септембар 2008. *9. септембар 2008.*

1 Нека је H подгрупа групе G. Показати да је за свако $a \in G$, $aHa^{-1} := \{aha^{-1} : h \in H\}$ подгрупа од G и да је $aHa^{-1} \cong H$.

Решење Да би aHa^{-1} била подгрупа довољно је показати да за $x, y \in aHa^{-1}$, $xy^{-1} \in aHa^{-1}$. Но тада постоје $h_1, h_2 \in H$ тако да је $x = ah_1a^{-1}$, $y = ah_2a^{-1}$, па је $xy^{-1} = (ah_1a^{-1})(ah_2a^{-1})^{-1} = ah_1a^{-1}ah_2^{-1}a^{-1} = ah_1h_2^{-1}a^{-1}$, и како је $h_1h_2^{-1} \in H$, јер је H подгрупа, то је $xy^{-1} \in aHa^{-1}$.

Уочимо пресликавање $f : H \longrightarrow aHa^{-1}$, дефинисано са $f(h) = aha^{-1}$, $h \in H$. Оно је очигледно добро дефинисано. Показаћемо да је хомоморфизам и бијекција, што завршава посао. За хомоморфизам уочимо да је $f(h_1h_2) = ah_1h_2a^{-1} = ah_1a^{-1}ah_2a^{-1} = f(h_1)f(h_2)$. Пресликавање је "1-1" јер из $f(h_1) = f(h_2)$ следи $ah_1a^{-1} = ah_2a^{-1}$, одакле после канцелације добијамо $h_1 = h_2$. И оно је "на", јер се у елемент aha^{-1} слика елемент $h \in H$. $\square$

2 Показати да за свако $n \in \mathbb{Z}$ важи $42 \mid n^7 - n$.

Решење Користимо два пута Ојлерову теорему, и то за природне бројеве 3 и 7. Најпре израчунамо да је $\varphi(3) = 2$ и $\varphi(7) = 6$. Уочимо да су n^7 и n исте парности, те је њихова разлика увек парна, тј. $2 \mid n^7 - n$. Ако су $(n, 3) = 1$, тада према Ојлеровој теореми $n^2 =_3 1$, па је $n^7 =_3 (n^2)^3 n =_3 n$, тј. $3 \mid n^7 - n$, а ако $(n, 3) \neq 1$, то $3 \mid n$, па $3 \mid n^7 - n$ и у том случају. Све у свему, $3 \mid n^7 - n$. Слично, ако $(n, 7) = 1$ према Ојлеровој теореми $n^6 =_7 1$, па $n^7 =_7 n$, тј. $7 \mid n^7 = n$ и ако $(n, 7) \neq 1$, то $7 \mid n$, па $7 \mid n^7 - n$ и све у свему $7 \mid n^7 - n$. Како 2, 3, 7 деле $n^7 - n$, дели га и њихов највећи заједнички садржалац, тј. $42 \mid n^7 - n$. $\square$

3 Показати да група реда 105 није проста.

Решење Нека је G таква да је $|G| = 105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$. Према Силовљевим теоремама израчунајмо s_5 и s_7. Из $s_5 \mid 3 \cdot 7 = 21$ и $s_5 =_5 1$ имамо $s_5 \in \{1, 21\}$. Из $s_7 \mid 3 \cdot 5 = 15$ и $s_7 =_7 1$ имамо $s_7 \in \{1, 15\}$.

Претпоставимо да је $s_5 = 21$, а $s_7 = 15$ и нека су H_i, $1 \leq i \leq 21$, S_5-подгрупе, а K_j, $1 \leq j \leq 15$, S_7-подгрупе. За њих важи $|H_i| = 5$ и $|K_j| = 7$, и све се међусобно секу само тривијално. Одатле добијамо $105 = |G| \geq |\bigcup_i H_i \cup \bigcup_j K_j| = 21 \cdot 4 + 15 \cdot 6 + 1 \imath 175$. Контрадикција. Дакле $s_5 = 1$ или $s_7 = 1$, а то значи да постоји нека (S_5 или S_7-подгрупа) која је нетривијална, права и нормална, те G није проста. $\square$

4 Абелова група G је дата генераторима a, b, c и релацијама:

$$\begin{array}{rrrcl} 3a & +2b & +5c & = & 0, \\ -4a & +2b & +2c & = & 0, \\ -6a & +8b & +14c & = & 0. \end{array}$$

Наћи елементарну и нормалну форму групе G. Одредити редове свих елемената, као и број елемената одређеног реда.

Решење

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -4 & 2 & 2 \\ -6 & 8 & 14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 7 \\ 0 & 12 & 24 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 14 & 26 \\ -1 & 4 & 7 \\ 0 & 12 & 24 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 14 & 26 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 24 \end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 24 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Из претходних једнакости закључујемо да је $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12}$, што је њена нормална форма, док је елементарна форма $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2^2} \times \mathbb{Z}_3$. Како група G има 24 елемента, а ред елемента мора да дели ред групе, кандитати за редове су 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. Елемената реда 1 има само један, и то је неутрал групе. Приметимо из нормалне форме да група није циклична, те елемената реда 24 нема. Из елементарне форме је јасно да ни елемената реда 8 нема. Тако да преостала 23 елемента су реда 2, 3, 4, 6 или 12. Концентришимо се на елементарну форму. Нека је (a, b, c) произвољан елемент. Његов ред је НЗС $(r(a), r(b), r(c))$, и притом $r(a) \in \{1, 2\}$, $r(b) \in \{1, 2, 4\}$, $r(c) \in \{1, 3\}$. Елементи реда 2 су облика (a, b, c), при чему је $r(a) = 1$, $r(b) = 2$, $r(c) = 1$ или $r(a) = 2$, $r(b) = 1$, $r(c) = 1$ или $r(a) = 2$, $r(b) = 2$, $r(c) = 1$, одакле их има $\varphi(2) + \varphi(2) + \varphi(2)\varphi(2) = 3$. Елементи реда 3 су облика (a, b, c) и притом је $r(a) = 1$, $r(b) = 1$, $r(c) = 3$, те их има $\varphi(3) = 2$. Елементи реда 4 су истог облика (a, b, c), али је $r(a) = 1$, $r(b) = 4$, $r(c) = 1$ или $r(a) = 2$, $r(b) = 4$, $r(c) = 1$, одакле их има $\varphi(4) + \varphi(2)\varphi(4) = 4$. За елементе реда 6 важи $r(a) = 1$, $r(b) = 2$, $r(c) = 3$ или $r(a) = 2$, $r(b) = 1$, $r(c) = 3$ или $r(a) = 2$, $r(b) = 2$, $r(c) = 3$, те их има $\varphi(2)\varphi(3) + \varphi(2)\varphi(3) + \varphi(2)\varphi(2)\varphi(3) = 6$. И коначо елементи реда 12 су облика (a, b, c) при чему је $r(a) = 1$, $r(b) = 4$, $r(c) = 3$ или $r(a) = 2$, $r(b) = 4$, $r(c) = 3$, и има их $\varphi(4)\varphi(3) + \varphi(2)\varphi(4)\varphi(3) = 8$. $\square$

5 Нека је $\alpha = \sqrt[3]{2 + \sqrt{2}}$. Наћи $min(\alpha, \mathbb{Q})$, $|\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}|$ и дати једну базу за $\mathbb{Q}(\alpha)$ над $\mathbb{Q}$. У уоченој бази представити елемент $\frac{1}{\alpha - 1}$.

Решење Уочимо да је $\alpha^3 = 2 + \sqrt{2}$, одакле је $\alpha^3 - 2 = \sqrt{2}$. Квадртирањем добијамо $\alpha^6 - 4\alpha^3 + 2 = 0$, одакле α анулира полином $f(x) = x^6 - 4x^3 + 2$, који је несводљив над $\mathbb{Z}$ по Ајзенштајновом критеријуму, па је према Гаусовој леми несводљив и над $\mathbb{Q}$. Одатле је $min(\alpha, \mathbb{Q}) = x^6 - 4x^3 + 2$, $|\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}| = 6$, а једна база је $\{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5\}$. Да бисмо нашли уочени елемент у бази, поделимо полином $f(x)$ са $g(x) = x - 1$. Добијамо $f(x) = g(x)(x^5 + x^4 + x^3 - 3x^2 - 3x - 3) - 1$, одатле је $\frac{1}{\alpha - 1} = \frac{1}{g(\alpha)} = \frac{\alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 - 3\alpha^2 - 3\alpha - 3}{g(\alpha)(\alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 - 3\alpha^2 - 3\alpha - 3)} = \frac{\alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 - 3\alpha^2 - 3\alpha - 3}{f(\alpha) + 1} = \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 - 3\alpha^2 - 3\alpha - 3$. $\square$