Алгебра, септембар 2009. *2. септембар 2009.*

1.1. На скупу $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0$ $\left[\mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \setminus \{0\}\right]$ задата је операција $\star$ са: $(a,b) \star (x,y) = (ay + x, by)$.

(а) Показати да је $(G, \star)$ група. Да ли је ова група Абелова?

(б) Испитати да ли су $H = \{(a,1) \mid a \in \mathbb{R}\}$, $K = \{(0,b) \mid b \in \mathbb{R}_0\}$ и $H \cup K$ подгрупе групе G.

(в) Испитати да ли су пресликавања f, $g : G \to G$, задата са $f(a,b) = (0,b)$ и $g(a,b) = (a,1)$ хомоморфизми група. Ако јесу, одредити им језгро и слику.

1.2. Нека је a генератор цикличне групе C_{24}.

(а) Одредити све генераторе уочене групе C_{24}.

(б) Одредити, ако постоји, ендоморфизам f групе C_{24} тако да је $f(a^5) = a^6$.

(в) Одредити, ако постоји, ендоморфизам g групе C_{24} тако да је $f(a^6) = a^5$.

2.1. (а) Нека је f аутоморфизам групе $(\mathbb{Q}, +)$. Показати да за свако $x \in \mathbb{Q}$ важи $f(x) = f(1)x$.

(б) Показати да је пресликавање $\varphi : \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, +) \to (\mathbb{Q}, \cdot)$, задато са $\varphi(f) = f(1)$ мономорфизам група.

2.2. Одредити остатак при дељењу броја 1403^{1975} са 60.

2.3. Дате су пермутације $f = (1\ 4\ 7)(2\ 3\ 7)(4\ 5\ 9)(1\ 6\ 8)(3\ 8\ 9)$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 7 & 5 & 1 & 2 & 9 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in S_9$. Наћи њихову циклусну декомпозицију, ред и парност и одредити, ако постоји, пермутацију h тако да је $g = h^{-1} f h$.

3.1. Абелова група G је дата генераторима a, b, c за које важе релације:

$$\begin{array}{rcrcrcl} -54\,a & - & 36\,b & - & 50\,c & = & 0 \\ -126\,a & - & 72\,b & - & 118\,c & = & 0 \\ 72\,a & + & 36\,b & + & 70c & = & 0. \end{array}$$

Одредити елементарну и нормалну форму групе G и број елемената реда 2, 3 и максималног реда.

3.2. (а) Показати да је $P = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\}$ прстен у односу на операцију множења.

(б) Показати да је $I = \{2a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\}$ идеал прстена P.

(в) Да ли је он прост? Максималан?

3.3. Нека је $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Одредити $|\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}|$, дати једну базу за $\mathbb{Q}(\alpha)$ над $\mathbb{Q}$ и у уоченој базу представити елемент $\dfrac{1}{\alpha + 1}$.

3.4. Дат је полином $f(x) = x^3 + 2x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$.

(а) Показати да је $f(x)$ несводљив над $\mathbb{Z}_3$.

(б) Колико елемената има у пољу $(\mathbb{Z}_3[x])_f$?

(в) Израчунати инверз елемента $2x^2 + 1$ у пољу $(\mathbb{Z}_3[x])_f$.