Алгебра, И смер, 2. септембар 2015.

1. Нека је G група и $a, b, g \in G$.

а) [6] Доказати да је $r(gag^{-1}) = r(g)$.

б) [6] Доказати да је $r(ab) = r(ba)$.

2. а) [6] Наћи редове елемената ρ^8, $\sigma\rho^{12}$ и $\sigma\rho^7\sigma\rho^3$ групе $\mathbb{D}_{10}$ (ρ и σ су ротација и симетрија које генеришу $\mathbb{D}_{10}$).

б) [6] Наћи све подгрупе групе $\mathbb{D}_8$ које не садрже ρ^2.

3. Дате су пермутације $\sigma : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 1 & 3 & 8 & 2 & 9 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ и $\pi = (136)(562)(423)(1984)$.

а) [8] Представити пермутације σ, $\pi^{-1}\sigma$ и $\sigma^{-1}\pi\sigma$ као производ дисјунктних циклуса, одредити им редове и парност.

б) [6] Одредити σ^{2014}, $(\pi^{-1}\sigma)^{2015}$ и $(\sigma^{-1}\pi\sigma)^{2016}$.

4. Нека је G комутативна група задата генераторима x_1, x_2, x_3 и релацијама

$$\begin{aligned} 4x_1 + 8x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 8x_1 + 6x_2 - 4x_3 &= 0 \\ -4x_1 + 4x_2 + 8x_3 &= 0. \end{aligned}$$

а) [9] Наћи нормалну и елементарну форму групе G.

б) [5] Да ли постоји природан број n такав да је $\mathbb{Z}_n \times G \cong \mathbb{Z}_{40} \times \mathbb{Z}_{60}$?

5. [12] Решити систем конгруенција

$$\begin{aligned} 2x &\equiv 1 \pmod 7 \\ 4x &\equiv 2 \pmod 9 \\ 5x &\equiv 3 \pmod{11}. \end{aligned}$$

6. [16] Нека је K коренско поље полинома $f(X) = X^4 + 3X^2 - 10$. Одредите неки елемент $\alpha \in \mathbb{C}$ такав да је $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ и минимални полином елемента α над $\mathbb{Q}$. Напишите $\dfrac{1}{\alpha^2 + 1}$ у облику $p(\alpha)$ за неки полином $p(X) \in \mathbb{Q}[X]$.