

Diskretna matematika, januar 2012.

1. Imate kutiju u kojoj se nalazi n plavih kuglica $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ i m crvenih kuglica $\{c_1, c_2, \dots, c_m\}$. Iz kutije izvlačite k kuglica. Dokažite sledeći kombinatorni identitet:

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} \binom{m+n-i}{k-i} = \begin{cases} \binom{m}{k}, & \text{ako je } m \geq k, \\ 0, & \text{ako je } m < k, \end{cases} \quad (1)$$

tako što ćete mu pridružiti odgovarajući kombinatorni problem sa kuglicama.

2. Podsetimo se da je

$$\sum_{j=0}^{\infty} \binom{a+j}{j} x^j = (1-x)^{-a-1}.$$

Koristeći ovo, metodom *generatorskih funkcija* dokažite identitet (1) iz prethodnog zadatka.

3. Hill-ovo šifrovanje je sledeći postupak: neka je dat prost broj p , 2×2 matrica k_1 i 2×1 vektor k_2 sa koeficijentima u \mathbb{Z}_p . Onda poruku m zapisanu kao kolona-vektor u \mathbb{Z}_p^2 šifrujemo koristeći formulu

$$\check{s}(m) = k_1 \cdot m + k_2 \pmod{p}.$$

Ako znate da porukama

$$m_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad m_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix} \quad m_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

odgovaraju šifre

$$\check{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \check{s}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \check{s}_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

i da je $p = 11$, odredite *ključeve* k_1 i k_2 . Zatim dešifrujte poruku $\check{s} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$.

4. Neka je G nepovezan graf. Dokazati da je \overline{G} povezan. (Graf \overline{G} je *komplement* grafa G ako su im čvorovi isti ako važi: dva čvora susedna u \overline{G} ako i samo ako nisu susedni u G .)
5. Data je Bulova funkcija $f(x, y, z) = (x' + y' + z)(x + y + z)$
- Naći KDF funkcije f
 - Koristeći Karnoovu mapu, naći minimalnu reprezentaciju funkcije f .