Дискретне структуре 1, други колоквијум 2007/08.
19. јануар 2008.

1 Методом резолуције показати ваљаност формуле $((q \wedge r) \vee \neg p) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \wedge r))$.
Решење: Нека је $A = ((q \wedge r) \vee \neg p) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \wedge r))$. Нађимо КНФ формуле $\neg A$. $\neg A = \neg(((q \wedge r) \vee \neg p) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \wedge r))) = ((q \wedge r) \vee \neg p) \wedge \neg(p \Rightarrow (q \wedge r)) = (q \vee \neg p) \wedge (r \vee \neg p) \wedge (p \wedge \neg(q \wedge r)) = (q \vee \neg p) \wedge (r \vee \neg p) \wedge p \wedge (\neg q \vee \neg r)$. Сад имамо:

$C_1 = \{q,\ \neg p\}$	
$C_2 = \{r,\ \neg p\}$	
$C_3 = \{p\}$	
$C_4 = \{\neg q,\ \neg r\}$	
$C_5 = \{q\}$	$Res(C_1,\ C_3,\ \neg p,\ p)$
$C_6 = \{r\}$	$Res(C_2,\ C_3,\ \neg p,\ p)$
$C_7 = \{\neg r\}$	$Res(C_4,\ C_5,\ \neg q,\ q)$
$C_8 = \emptyset$	$Res(C_6,\ C_7,\ r,\ \neg r)$

Како смо добили празну клаузу, то је формула $\neg A$ контрадикција, па је A таутологија. $\square$

2 Методом Карноових мапи или Квин-Мекласког упростити прекидачко коло дато својом КДНФ:

$$\overline{ABCD} \vee \overline{AB}CD \vee \overline{AB}C\overline{D} \vee \overline{A}BCD \vee A\overline{BCD} \vee A\overline{B}C\overline{D}.$$

Решење: Радимо Квин-Мекласког, и ово ми је било тешко за цртање. Имамо:

$\overline{ABCD}$ $\checkmark$	$\overline{BCD}$ $\checkmark$	$\overline{BD}$
$-\ -\ -\ -\ -$	$\overline{ABD}$ $\checkmark$	
$A\overline{BCD}$ $\checkmark$	$-\ -\ -\ -$	
$\overline{AB}C\overline{D}$ $\checkmark$	$A\overline{BD}$ $\checkmark$	
$-\ -\ -\ -\ -$	$\overline{AB}C$	
$\overline{AB}CD$ $\checkmark$	$\overline{B}C\overline{D}$ $\checkmark$	
$A\overline{B}C\overline{D}$ $\checkmark$	$-\ -\ -\ -$	
$-\ -\ -\ -\ -$	$\overline{A}CD$	
$\overline{A}BCD$ $\checkmark$		

Прости импликанти су $\overline{AB}C$, $\overline{A}CD$ и $\overline{BD}$. Правимо другу таблицу:

	$\overline{ABCD}$	$\overline{AB}CD$	$\overline{AB}C\overline{D}$	$\overline{A}BCD$	$A\overline{BCD}$	$A\overline{B}C\overline{D}$
$\overline{AB}C$		X	X			
$\overline{A}CD$		$\boxed{X}$		X		
$\overline{BD}$	X		$\boxed{X}$		X	X

Следи да је минимална форма прекидачког кола $\overline{A}CD \vee \overline{BD}$. $\square$

3 Наћи један модел и контрамодел за формулу:

$$(\forall x)(p(x) \Rightarrow p(f(x))) \Rightarrow (\exists x)p(f(x)).$$

Решење: Зовимо нашу формулу F. Посматрајмо структуру $\mathbb{D}_1 = (\mathbb{N},\ I^L)$, где је $I^L(p) = p_I,\ I^L(f) = f_I$, дато са:

$$p_I(a) = \top \text{ ако и само ако } a = a,$$

$$f_I(a) = a.$$

Покажимо $\mathbb{D}_1 \models F$. Претпоставимо супротно, да дефинисана структура није модел. Тада постоји валуација $v : Var \to \mathbb{N}$, тако да је $I_v(F) = \perp$. Но, тада је $I_v((\forall x)(p(x) \Rightarrow p(f(x)))) = \top$ и $I_v((\exists x)p(f(x))) = \perp$. Ово друго значи да за све валуације $u \sim_x v$ важи $I_u(p(f(x))) = \perp$. Али узмимо да је $u(x) = n \in \mathbb{N}$, било који природан број. Тада добијамо $p_I(f_I(n))) = \perp$, тј. $p_I(n) = \perp$, односно $n \neq n$, што је контрадикција. Следи, заиста важи $\mathbb{D}_1 \models F$.

Посматрајмо даље структуру $\mathbb{D}_2 = (\mathbb{N},\ I^L)$, где је $I^L(p) = p_I,\ I^L(f) = f_I$, дато са:

$$p_I(a) = \top \text{ ако и само ако } a \neq a,$$

$$f_I(a) = a.$$

Покажимо $\mathbb{D}_2 \not\models F$. Претпоставимо супротно, да дефинисана структура јесте један модел за формулу. Тада је за све валуације $v : Var \to \mathbb{N}$ испуњено $I_v(F) = \top$. Тада раздвајамо два случаја.

1° $I_v((\forall x)(p(x) \Rightarrow p(f(x)))) = \perp$: Тада постоји валуација $v' \sim_x v$ за коју важи $I_{v'}(p(x) \Rightarrow p(f(x))) = \perp$. Нека је $v'(x) = n \in \mathbb{N}$. Тада имамо даље да важи $I_{v'}(p(x)) = \top$ и $I_{v'}(p(f(x))) = \perp$. Али прва чињеница нам каже $p_I(n) = \top$, тј. $n \neq n$, што је контрадикција, па први случај није могућ.

2° $I_v((\exists x)p(f(x))) = \top$: Тада постоји валуација $v'' \sim_x v$ за коју важи $I_{v''}(p(f(x))) = \top$. Нека је $v''(x) = m \in \mathbb{N}$. Тада добијамо $p_I(f_I(m)) = \top$, тј. $p_I(m) = \top$, односно $m \neq m$, што је контрадикција, па ни други случај није могућ. Следи, важи $\mathbb{D}_2 \not\models F$. $\square$

4 Методом таблоа показати ваљаност формуле:

$$(\exists x)(p(x) \vee q(x)) \Leftrightarrow (\exists x)p(x) \vee (\exists x)q(x).$$

Решење:

$$\begin{array}{c}
1.\ \mathcal{F}(\exists x)(p(x) \vee q(x)) \Leftrightarrow (\exists x)p(x) \vee (\exists x)q(x) \\
\begin{array}[t]{cc}
\begin{array}[t]{c}
2^{\star}.(1)\ \mathcal{F}(\exists x)(p(x) \vee q(x)) \\
3.(1)\ \mathcal{T}(\exists x)p(x) \vee (\exists x)q(x) \\
\begin{array}[t]{cc}
\begin{array}[t]{c}
6.(3)\ \mathcal{T}(\exists x)p(x) \\
8.(6)\ \mathcal{T}p(a) \\
9.(2)\ \mathcal{F}p(a) \vee q(a) \\
10.(9)\ \mathcal{F}p(a) \\
11.(9)\ \mathcal{F}q(a) \\
\times(8,\ 10)
\end{array}
&
\begin{array}[t]{c}
7.(3)\ \mathcal{T}(\exists x)q(x) \\
12.(7)\ \mathcal{T}q(b) \\
13.(2)\ \mathcal{F}p(b) \vee q(b) \\
14.(13)\ \mathcal{F}p(b) \\
15.(13)\ \mathcal{F}q(b) \\
\times(12,\ 15)
\end{array}
\end{array}
\end{array}
&
\begin{array}[t]{c}
4.(1)\ \mathcal{T}(\exists x)(p(x) \vee q(x)) \\
5.(1)\ \mathcal{F}(\exists x)p(x) \vee (\exists x)q(x) \\
16.(4)\ \mathcal{T}p(c) \vee q(c) \\
17^{\star}.(5)\ \mathcal{F}(\exists x)p(x) \\
18^{\star}.(5)\ \mathcal{F}(\exists x)q(x) \\
19.(17)\ \mathcal{F}p(c) \\
20.(18)\ \mathcal{F}q(c) \\
\begin{array}[t]{cc}
\begin{array}[t]{c}
21.(16)\ \mathcal{T}p(c) \\
\times(19,\ 21)
\end{array}
&
\begin{array}[t]{c}
22.(16)\ \mathcal{T}q(c) \\
\times(20,\ 22)
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}$$

Како су све гране таблоа затворене, то је формула ваљана. $\square$

5 Непротивречност предикатског рачуна првог реда.

6 **(а)** Навести аксиоме теорије Безатомичних Булових алгебри и дати примере бесконачних и коначних модела.
(б) Навести примере пребројивих модела теорије Густог линеарног уређења без крајева, као и нека својства ових модела.

Славко Моцоња
slavkomm@gmail.com
http://www.matf.bg.ac.yu/∼slavko