Дискретне структуре 1, јануар 2008.
4. фебруар 2008.

1 Методом карактеристичних функција показати скуповни идентитет:

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

Решење: Рачунамо $\chi_{A\setminus(B\cup C)}$ и $\chi_{(A\setminus B)\cap(A\setminus C)}$ и показујемо да су једнаке.
$\chi_{A\setminus(B\cup C)} = \chi_A - \chi_A\chi_{B\cup C} = \chi_A - \chi_A(\chi_B + \chi_C - \chi_B\chi_C) = \chi_A - \chi_A\chi_B - \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_B\chi_C$.
$\chi_{(A\setminus B)\cap(A\setminus C)} = \chi_{A\setminus B}\chi_{A\setminus C} = (\chi_A - \chi_A\chi_B)(\chi_A - \chi_A\chi_C) = \chi_A^2 - \chi_A^2\chi_B - \chi_A^2\chi_C + \chi_A^2\chi_B\chi_C = \chi_A - \chi_A\chi_B - \chi_A\chi_C + \chi_A\chi_B\chi_C$.
Како су карактеристиче функције једнаке, то важи дати идентитет. □

2 На скупу $A = \{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ дата је релација ρ са:

$$x\rho y \text{ ако и само ако } x^2 + 2y = y^2 + 2x.$$

Показати да је ρ релација еквиваленције и наћи класе еквиваленције.
Решење: Проверавамо услове:
Р За све x важи $x^2 + 2x = x^2 + 2x$, па је $x\rho x$;
С Ако је $x\rho y$, тада је $x^2 + 2y = y^2 + 2x$, а тривијално је $y^2 + 2x = x^2 + 2y$, тј. $y\rho x$;
Т Нека $x\rho y$ и $y\rho z$. Тада је $x^2 + 2y = y^2 + 2x$ и $y^2 + 2z = z^2 + 2y$. Сабирањем ове две једнакости добијамо $x^2 + (y^2 + 2y) + 2z = z^2 + (y^2 + 2y) + 2x$, одакле је $x^2 + 2z = z^2 + 2x$, тј. $x\rho z$.
Дакле, релација јесте еквиваленција, и тражимо класе. $y \in C_x$ ако и само ако $x\rho y$, тј. $x^2 + 2y = y^2 + 2x$. Одатле је $x^2 - 2x = y^2 - 2y$, тј. $x^2 - 2x + 1 = y^2 - 2y + 1$, што записујемо $(x-1)^2 = (y-1)^2$. Следи $y = x$ или $y = 2 - x$. Дакле $C_x = \{x,\ 2-x\ :\ x \in A,\ 2-x \in A\}$, одакле налазимо $C_{-3} = C_5 = \{-3, 5\}$, $C_{-2} = C_4 = \{-2, 4\}$, $C_{-1} = C_3 = \{-1, 3\}$, $C_0 = C_2 = \{0, 2\}$ и $C_1 = \{1\}$. □

3 Показати да у исказном рачуну важи:

$$A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow C \vdash (A \wedge B) \Rightarrow C.$$

Решење: Како је $A \wedge B$ замена за $\neg(A \Rightarrow \neg B)$, то треба показати $A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow C \vdash \neg(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow C$. Изводимо:

(1)	хипотеза	$A \Rightarrow C$
(2)	хипотеза	$B \Rightarrow C$
(3)	Л4(в)	$(B \Rightarrow C) \Rightarrow (\neg C \Rightarrow \neg B)$
(4)	МП(2,3)	$\neg C \Rightarrow \neg B$
(5)	Ax1	$\neg B \Rightarrow (A \Rightarrow \neg B)$
(6)	Л2(4,5)	$\neg C \Rightarrow (A \Rightarrow \neg B)$
(7)	Л4(в)	$(\neg C \Rightarrow (A \Rightarrow \neg B)) \Rightarrow (\neg(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg\neg C)$
(8)	МП(6,7)	$\neg(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg\neg C$
(9)	Л4(а)	$\neg\neg C \Rightarrow C$
(10)	Л2(8,9)	$\neg(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow C$

Дакле, следи тврђење. □

4 Методом резолуције показати ваљаност формуле:

$$(\neg q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow ((\neg q \Rightarrow p) \Rightarrow q).$$

Решење: Нека је F наша формула. Онда је $\neg F \equiv \neg[(\neg q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow ((\neg q \Rightarrow p) \Rightarrow q)] \equiv \neg[\neg(\neg\neg q \vee \neg p) \vee (\neg(\neg\neg q \vee p) \vee q)] \equiv (q \vee \neg p) \wedge \neg(\neg(q \vee p) \vee q) \equiv (q \vee \neg p) \wedge (q \vee p) \wedge \neg q$. Изводимо методом резолуције:

$C_1 = \{\neg p, q\}$	
$C_2 = \{p, q\}$	
$C_3 = \{\neg q\}$	
$C_4 = \{q\}$	$Res(C_1, C_2, \neg p, p)$
$C_5 = \emptyset$	$Res(C_3, C_4, \neg q, q)$

Како смо добили празну клаузу формула $\neg F$ је контрадикција, те је F таутологија. □

5 Наћи модел и контрамодел за формулу:

$$(\forall x)(\exists y)p(f(x,y),y).$$

Решење:

Модел: Посматрајмо структуру $\mathbb{D}_1 = (\mathbb{N}, I^L)$, у којој је $I^L(p) = p_I$, $I^L(f) = f_I$ интерпретирано са:

$$p_I(a,b) = \top \text{ ако и само ако } a = b,$$

$$f_I(a,b) = a.$$

Покажимо да је $\mathbb{D}_1 \models F$, где је F дата формула. Претпоставимо супротно, да постоји валуација $v : Var \to \mathbb{N}$, тако да је $I_v(F) = \bot$. Тада постоји валуација $v' \sim_x v$ тако да је $I_{v'}((\exists y)p(f(x,y),y)) = \bot$. Нека је $v'(x) = n \in \mathbb{N}$. Даље је за све валуације $u \sim_y v'$ тачно $I_u(p(f(x,y),y)) = \bot$. Јасно је $u(x) = v'(x) = n$, и узмимо баш $u(y) = n$. Имамо $p_I(f_I(n,n),n) = \bot$, тј. $p_I(n,n) = \bot$, одакле $n \neq n$. Контрадикција. Закључујемо $\mathbb{D}_1 \models F$.

Контрамодел: Посматрајмо структуру $\mathbb{D}_2 = (\mathbb{N}, I^L)$, у којој је $I^L(p) = p_I$, $I^L(f) = f_I$ интерпретирано са:

$$p_I(a,b) = \top \text{ ако и само ако } a \neq b,$$

$$f_I(a,b) = b.$$

Покажимо да је $\mathbb{D}_2 \not\models F$. Претпоставимо супротно да је за све валуације $v : Var \to \mathbb{N}$ испуњено $I_v(F) = \top$. Следи да за све валуације $u \sim_x v$ важи $I_u((\exists y)p(f(x,y),y)) = \top$. Даље, постоји валуација $v' \sim_y u$ тако да је $I_{v'}(p(f(x,y),y)) = \top$. Нека је $v'(y) = m \in \mathbb{N}$. Имамо $p_I(f_I(u(x),m),m) = \top$, односно $p_I(m,m) = \top$, одакле $m \neq m$. Контрадикција. Закључујемо $\mathbb{D}_2 \not\models F$. □

6 Методом таблоа показати ваљаност формуле:

$$(\exists x)(p(x) \uparrow q(x)) \veebar (\forall x)p(x) \wedge (\forall x)q(x).$$

Решење:

$$\begin{array}{c}
1.\ \mathcal{F}(\exists x)(p(x) \uparrow q(x)) \veebar (\forall x)p(x) \wedge (\forall x)q(x) \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}
2^{\star}.(1)\ \mathcal{F}(\exists x)(p(x) \uparrow q(x)) \\
3.(1)\ \mathcal{F}(\forall x)p(x) \wedge (\forall x)q(x) \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}
6.(3)\ \mathcal{F}(\forall x)p(x) \\
8.(6)\ \mathcal{F}p(a) \\
9.(2)\ \mathcal{F}p(a) \uparrow q(a) \\
10.(9)\ \mathcal{T}p(a) \\
11.(9)\ \mathcal{T}q(a) \\
\times(8,\ 10)
\end{array} &
\begin{array}{c}
7.(3)\ \mathcal{F}(\forall x)q(x) \\
12.(7)\ \mathcal{F}q(b) \\
13.(2)\ \mathcal{F}p(b) \uparrow q(b) \\
14.(13)\ \mathcal{T}p(b) \\
15.(13)\ \mathcal{T}q(b) \\
\times(12,\ 15)
\end{array}
\end{array}
\end{array} &
\begin{array}{c}
4.(1)\ \mathcal{T}(\exists x)(p(x) \uparrow q(x)) \\
5.(1)\ \mathcal{T}(\forall x)p(x) \wedge (\forall x)q(x) \\
16.(4)\ \mathcal{T}p(c) \uparrow q(c) \\
17^{\star}.(5)\ \mathcal{T}(\forall x)p(x) \\
18^{\star}.(5)\ \mathcal{T}(\forall x)q(x) \\
19.(17)\ \mathcal{T}p(c) \\
20.(18)\ \mathcal{T}q(c) \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}
21.(16)\ \mathcal{F}p(c) \\
\times(19,\ 21)
\end{array} &
\begin{array}{c}
22.(16)\ \mathcal{F}q(c) \\
\times(20,\ 22)
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}$$

Како су све гране таблоа затворене, то је формула ваљана. □

Славко Моцоња
slavkomm@gmail.com
http://www.matf.bg.ac.yu/~slavko