Дискретне структуре 1 27. август 2012.

1. Доказати да важи скуповни идентитет: $(A \cup B)^c \triangle (C \setminus A) = A^c \cap (B^c \triangle C)$.

2. а) На скупу $M = \{2, 5, 10, 20, 50, 100\}$ је дата релација поретка ρ са: $x \rho y$ ако $x \mid y$. Испитати да ли постоје најмањи, највећи, као и минимални и максимални елементи, и ако постоје, одредити их.
б) На скупу $N = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ је задата бинарна релација $\sim$ са: $(x, y) \sim (z, t)$ ако $x^2 = z^2$ и $3 \mid y - t$. Доказати да је ово једна релација еквиваленције.

3. Користећи математичку индукцију доказати да за сваки природни број $n \geq 1$ важи

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \cdots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

4. Нека је $\mathcal{L}$ језик првог реда задат са: $\mathrm{Rel}\mathcal{L} = \{P, Q\}, \mathrm{Fun}\mathcal{L} = \{F\}$, при чему је $ar(P) = ar(F) = 2$ и $ar(Q) = 1$. Дати језик је интерпретиран на скупу $\mathbb{N}$ тако да $P^{\mathcal{L}}(x, y) = 1$ ако $5 \mid x - y$, $Q^{\mathcal{L}}(x) = 1$ ако је $x \geq 2$, $F^{\mathcal{L}}(x, y) = x^y$.
а) Испитати тачност формуле $Q(F(x, y)) \veebar P(F(x, y), F(y, x))$ при валуацији $u = \begin{pmatrix} x & y & \cdots \\ 6 & 1 & \cdots \end{pmatrix}$.
б) Одредити валуацију v у којој је формула $\exists x Q(F(x, y)) \Leftrightarrow \neg P(F(y, x), x)$ тачна.

5. Методом таблоа доказати да је ваљана формула:

$$\forall x(p(x) \Rightarrow (\exists y q(x, y) \Rightarrow r(x))) \Rightarrow (\forall x p(x) \Rightarrow \forall x \forall y(q(x, y) \Rightarrow r(x))).$$

Дискретне структуре 1 27. август 2012.

1. Доказати да важи скуповни идентитет: $(A \cup B)^c \triangle (C \setminus A) = A^c \cap (B^c \triangle C)$.

2. а) На скупу $M = \{2, 5, 10, 20, 50, 100\}$ је дата релација поретка ρ са: $x \rho y$ ако $x \mid y$. Испитати да ли постоје најмањи, највећи, као и минимални и максимални елементи, и ако постоје, одредити их.
б) На скупу $N = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ је задата бинарна релација $\sim$ са: $(x, y) \sim (z, t)$ ако $x^2 = z^2$ и $3 \mid y - t$. Доказати да је ово једна релација еквиваленције.

3. Користећи математичку индукцију доказати да за сваки природни број $n \geq 1$ важи

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \cdots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

4. Нека је $\mathcal{L}$ језик првог реда задат са: $\mathrm{Rel}\mathcal{L} = \{P, Q\}, \mathrm{Fun}\mathcal{L} = \{F\}$, при чему је $ar(P) = ar(F) = 2$ и $ar(Q) = 1$. Дати језик је интерпретиран на скупу $\mathbb{N}$ тако да $P^{\mathcal{L}}(x, y) = 1$ ако $5 \mid x - y$, $Q^{\mathcal{L}}(x) = 1$ ако је $x \geq 2$, $F^{\mathcal{L}}(x, y) = x^y$.
а) Испитати тачност формуле $Q(F(x, y)) \veebar P(F(x, y), F(y, x))$ при валуацији $u = \begin{pmatrix} x & y & \cdots \\ 6 & 1 & \cdots \end{pmatrix}$.
б) Одредити валуацију v у којој је формула $\exists x Q(F(x, y)) \Leftrightarrow \neg P(F(y, x), x)$ тачна.

5. Методом таблоа доказати да је ваљана формула:

$$\forall x(p(x) \Rightarrow (\exists y q(x, y) \Rightarrow r(x))) \Rightarrow (\forall x p(x) \Rightarrow \forall x \forall y(q(x, y) \Rightarrow r(x))).$$