Колоквијум из Линеарне алгебре
група 103

23.1.2016.

1. Нека је $G = \{(x,y):\ \ x,y \in \mathbb{Q},\ x^2+5y^2 \neq 0\}$. Доказати да је $(G,\star)$ група, где је операција $\star$ дефинисана са

$$(x_1,y_1)\star(x_2,y_2) = (x_1x_2 - 5y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2).$$

Да ли је група G комутативна?

2. Нека је $U = \Omega(f_1, f_2, f_3)$, где је

$$\begin{array}{rcl} f_1 &=& (1,\quad 2,\quad 3,\quad 4) \\ f_2 &=& (2,\quad 1,\quad 5,\quad 4) \\ f_3 &=& (-1,\quad 4,\quad -1,\quad 4) \end{array}$$

и нека је W скуп решења система линеарних једначина

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} -x &+& (\alpha-2)y &+& \alpha z &+& (\alpha+1)t &=& 0 \\ \alpha x &+& (\alpha-2)y &+& \alpha z &-& t &=& 0\ . \\ \alpha x &+& (\alpha-2)y &-& z &+& \alpha t &=& 0 \end{array}$$

Одредити $\alpha \in \mathbb{R}$ за које је $\dim W = 2$ и за такво α наћи по једну базу и димензије потпростора U, W, $U+W$ као и $U \cap W$.

3. Нека је U скуп свих матрица облика $\begin{bmatrix} 2a & b-a \\ b+a & b \end{bmatrix}$, $a,b \in \mathbb{R}$, а W скуп свих матрица X из $M_2(\mathbb{R})$ за које важи да је $AX - XA^T = 0$, где је $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

   а) Доказати да су U и W векторски потпростори простора $M_2(\mathbb{R})$.

   б) Одредити бар по једну базу као и димензију потпростора U и W.

   в) Доказати да је $U \oplus W = M_2(\mathbb{R})$.

4. Дата је матрица A над пољем $\mathbb{R}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{bmatrix}.$$

   а) У зависности од параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ одредити ранг матрице A.

   б) Ако је $\alpha = -1$, одредити канонску матрицу A^0 матрице A и инверзибилне матрице P и Q такве да је $A^0 = PAQ$.

   в) Ако је $\alpha = -2$, одредити инверз матрице A.

Све одговоре детаљно образложити

Колоквијум из Линеарне алгебре
група 103

23.1.2016.

1. Нека је $G = \{(x,y):\ \ x,y \in \mathbb{Q},\ x^2+5y^2 \neq 0\}$. Доказати да је $(G,\star)$ група, где је операција $\star$ дефинисана са

$$(x_1,y_1)\star(x_2,y_2) = (x_1x_2 - 5y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2).$$

Да ли је група G комутативна?

2. Нека је $U = \Omega(f_1, f_2, f_3)$, где је

$$\begin{array}{rcl} f_1 &=& (1,\quad 2,\quad 3,\quad 4) \\ f_2 &=& (2,\quad 1,\quad 5,\quad 4) \\ f_3 &=& (-1,\quad 4,\quad -1,\quad 4) \end{array}$$

и нека је W скуп решења система линеарних једначина

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} -x &+& (\alpha-2)y &+& \alpha z &+& (\alpha+1)t &=& 0 \\ \alpha x &+& (\alpha-2)y &+& \alpha z &-& t &=& 0\ . \\ \alpha x &+& (\alpha-2)y &-& z &+& \alpha t &=& 0 \end{array}$$

Одредити $\alpha \in \mathbb{R}$ за које је $\dim W = 2$ и за такво α наћи по једну базу и димензије потпростора U, W, $U+W$ као и $U \cap W$.

3. Нека је U скуп свих матрица облика $\begin{bmatrix} 2a & b-a \\ b+a & b \end{bmatrix}$, $a,b \in \mathbb{R}$, а W скуп свих матрица X из $M_2(\mathbb{R})$ за које важи да је $AX - XA^T = 0$, где је $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

   а) Доказати да су U и W векторски потпростори простора $M_2(\mathbb{R})$.

   б) Одредити бар по једну базу као и димензију потпростора U и W.

   в) Доказати да је $U \oplus W = M_2(\mathbb{R})$.

4. Дата је матрица A над пољем $\mathbb{R}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{bmatrix}.$$

   а) У зависности од параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ одредити ранг матрице A.

   б) Ако је $\alpha = -1$, одредити канонску матрицу A^0 матрице A и инверзибилне матрице P и Q такве да је $A^0 = PAQ$.

   в) Ако је $\alpha = -2$, одредити инверз матрице A.

Све одговоре детаљно образложити