Колоквијум из Линеарне алгебре
група 103

27.1.2017.

$\boxed{1}$ Доказати да је $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R}, a \neq b \right\}$ група у односу на множење матрица. Да ли је група G комутативна?

$\boxed{2}$ Нека је $U = \{p \in \mathbb{R}^4[x] : \ p(1) = p'(1), \ p(0) = p(-1)\}$ и $W = \Omega(f_1, f_2, f_3)$, где је

$$\begin{aligned} f_1 &= 3 + x^2 + x^3 \\ f_2 &= 2 - 2x - x^2 + x^3 \\ f_3 &= 4 + 2x + 3x^2 + x^3. \end{aligned}$$

а) Одредити по једну базу и димензије потпростора U, W, $U + W$ и $U \cap W$.

б) Доказати да постоји тачно једно $\lambda \in \mathbb{R}$ тако да је полином

$$q = 2 + x + \lambda x^2 + x^3 \in U + W,$$

и за ту вредност λ написати q као збир једног полинома из U и једног полинома из W.

$\boxed{3}$ Нека је $U = \left\{ \begin{bmatrix} x & y-x \\ y & x \end{bmatrix} : \ x, y \in \mathbb{R} \right\}$ и $W = \left\{ X \in M_2(\mathbb{R}) : \ AX = XA^T \right\}$, где је

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

а) Доказати да су U и W векторски потпростори простора $M_2(\mathbb{R})$.

б) Одредити бар по једну базу као и димензију потпростора U и W.

в) Доказати да је $U \oplus W = M_2(\mathbb{R})$.

$\boxed{4}$ Дата је матрица A над пољем $\mathbb{R}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & \alpha+1 \\ 1 & \alpha+1 & 3 \\ \alpha & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

а) У зависности од параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ одредити ранг матрице A.

б) Ако је $\alpha = 2$, одредити канонску матрицу A^0 матрице A и инверзибилне матрице P и Q такве да је $A^0 = PAQ$.

в) Одредити инверз матрице $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Све одговоре детаљно образложити

Колоквијум из Линеарне алгебре
група 103

27.1.2017.

$\boxed{1}$ Доказати да је $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R}, a \neq b \right\}$ група у односу на множење матрица. Да ли је група G комутативна?

$\boxed{2}$ Нека је $U = \{p \in \mathbb{R}^4[x] : \ p(1) = p'(1), \ p(0) = p(-1)\}$ и $W = \Omega(f_1, f_2, f_3)$, где је

$$\begin{aligned} f_1 &= 3 + x^2 + x^3 \\ f_2 &= 2 - 2x - x^2 + x^3 \\ f_3 &= 4 + 2x + 3x^2 + x^3. \end{aligned}$$

а) Одредити по једну базу и димензије потпростора U, W, $U + W$ и $U \cap W$.

б) Доказати да постоји тачно једно $\lambda \in \mathbb{R}$ тако да је полином

$$q = 2 + x + \lambda x^2 + x^3 \in U + W,$$

и за ту вредност λ написати q као збир једног полинома из U и једног полинома из W.

$\boxed{3}$ Нека је $U = \left\{ \begin{bmatrix} x & y-x \\ y & x \end{bmatrix} : \ x, y \in \mathbb{R} \right\}$ и $W = \left\{ X \in M_2(\mathbb{R}) : \ AX = XA^T \right\}$, где је

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

а) Доказати да су U и W векторски потпростори простора $M_2(\mathbb{R})$.

б) Одредити бар по једну базу као и димензију потпростора U и W.

в) Доказати да је $U \oplus W = M_2(\mathbb{R})$.

$\boxed{4}$ Дата је матрица A над пољем $\mathbb{R}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & \alpha+1 \\ 1 & \alpha+1 & 3 \\ \alpha & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

а) У зависности од параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ одредити ранг матрице A.

б) Ако је $\alpha = 2$, одредити канонску матрицу A^0 матрице A и инверзибилне матрице P и Q такве да је $A^0 = PAQ$.

в) Одредити инверз матрице $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Све одговоре детаљно образложити