Линеарна алгебра
група 1О3

31.08.2018.

$\boxed{1}$ Израчунати вредност детерминанте

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

$\boxed{2}$ Нека је $L : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ дефинисано са

$$L(X) = CX, \text{ где је } C = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

а) Доказати да је L линеарни оператор векторског простора $M_2(\mathbb{R})$.

б) Наћи матрицу A линеарног оператора L у односу на канонску базу e простора $M_2(\mathbb{R})$, као и карактеристични и минимални полином оператора L.

в) Одредити сопствене вредности и сопствене векторе оператора L. Наћи бар једну базу f простора $M_2(\mathbb{R})$ у којој L има дијагоналну матрицу D.

$\boxed{3}$ Дато је пресликавање $\circ : \mathbb{R}^4[X] \times \mathbb{R}^4[X] \to \mathbb{R}$ на следећи начин:

$$p \circ q = p(-2)q(-2) + p(-1)q(-1) + p(1)q(1) + p(2)q(2).$$

а) Доказати да је $\circ$ скаларни производ на векторском простору $\mathbb{R}^4[X]$.

б) Ако је $U = \{p \in \mathbb{R}^4[X] \mid p'(1) = p'(-1), p'''(0) = 0\}$, доказати да је U векторски потпростор простора $\mathbb{R}^4[X]$ и одредити бар једну ортонормирану базу простора U.

в) Одредити ортогоналну пројекцију вектора $v = 1+X+2X^2$ на потпростор U, а затим и растојање вектора v од потпростора U и $U^{\perp}$.

$\boxed{4}$ Нека је V векторски простор над пољем $\mathbb{R}$ и нека су $L, G : V \to V$ линеарни оператори векторског простора V. Ако је $L^2 = L$, $G^2 = G$ и $LG = GL = G$, доказати да је $Ker(L-G) = KerL \oplus ImG$ и $Im(L-G) = ImL \cap KerG$.

Све одговоре детаљно образложити

Линеарна алгебра
група 1О3

31.08.2018.

$\boxed{1}$ Израчунати вредност детерминанте

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

$\boxed{2}$ Нека је $L : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ дефинисано са

$$L(X) = CX, \text{ где је } C = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

а) Доказати да је L линеарни оператор векторског простора $M_2(\mathbb{R})$.

б) Наћи матрицу A линеарног оператора L у односу на канонску базу e простора $M_2(\mathbb{R})$, као и карактеристични и минимални полином оператора L.

в) Одредити сопствене вредности и сопствене векторе оператора L. Наћи бар једну базу f простора $M_2(\mathbb{R})$ у којој L има дијагоналну матрицу D.

$\boxed{3}$ Дато је пресликавање $\circ : \mathbb{R}^4[X] \times \mathbb{R}^4[X] \to \mathbb{R}$ на следећи начин:

$$p \circ q = p(-2)q(-2) + p(-1)q(-1) + p(1)q(1) + p(2)q(2).$$

а) Доказати да је $\circ$ скаларни производ на векторском простору $\mathbb{R}^4[X]$.

б) Ако је $U = \{p \in \mathbb{R}^4[X] \mid p'(1) = p'(-1), p'''(0) = 0\}$, доказати да је U векторски потпростор простора $\mathbb{R}^4[X]$ и одредити бар једну ортонормирану базу простора U.

в) Одредити ортогоналну пројекцију вектора $v = 1+X+2X^2$ на потпростор U, а затим и растојање вектора v од потпростора U и $U^{\perp}$.

$\boxed{4}$ Нека је V векторски простор над пољем $\mathbb{R}$ и нека су $L, G : V \to V$ линеарни оператори векторског простора V. Ако је $L^2 = L$, $G^2 = G$ и $LG = GL = G$, доказати да је $Ker(L-G) = KerL \oplus ImG$ и $Im(L-G) = ImL \cap KerG$.

Све одговоре детаљно образложити