Линеарна алгебра А — 11.12.2010.
Први колоквијум, други ток

А Дата су матрице

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ и } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Нека је U скуп свих матрица $X \in M_2(\mathbb{R})$ које комутирају са матрицом A и нека је W скуп свих матрица $X \in M_2(\mathbb{R})$ за које важи да је

$$X + X^T = c \cdot B, \quad \text{за неко } c \in \mathbb{R}.$$

1° Доказати да су U и W векторски потпростори простора $M_2(\mathbb{R})$.

2° Одредити бар једну базу за U и за W, као и димензије оба простора.

3° Показати да је $M_2(\mathbb{R}) = U + W$.
Да ли је сума и директна?

Б Нека је $U = \Omega(u_1, u_2, u_3)$, где је

$$\begin{aligned} u_1 &= (1,\ 1,\ 2,\ 1) \\ u_2 &= (3,\ 1,\ 4,\ 1) \\ u_3 &= (1,\ 2,\ 3,\ 2) \end{aligned}$$

и нека је W скуп решења система линеарних једначина

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & (1-\alpha)y & + & z & - & t & = & 0 \\ 2x & + & \alpha y & + & (2-2\alpha)z & - & t & = & 0 \\ 3x & + & y & + & \alpha z & - & 2t & = & 0 \\ -5x & + & (2\alpha-4)y & - & z & + & 3t & = & 0. \end{array}$$

Одредити $\alpha \in \mathbb{R}$ за које је $\dim W = 2$ и за такво α наћи по једну базу и димензије потпростора U, W, $U + W$ као и $U \bigcap W$.

В Нека је $\prod$ скуп свих полинома $p = a + bx + cx^2 + dx^3$ из $\mathbb{R}^4[x]$ за које важи

$$p(-1) + p'(0) - p''(0) = 0$$

$$p(1) - p(0) - p''(0) = -1.$$

1° Доказати да је $\prod$ један афини потпростор простора $\mathbb{R}^4[x]$ и одредити његову директрису U.

2° Одредити неку базу од U и надопунити је до базе целог простора $\mathbb{R}^4[x]$.

3° Да ли је директриса U садржана у потпростору генерисаном векторима

$$v_1 = 2 + x,$$

$$v_2 = -1 + x^2,$$

$$v_3 = 3 + x^3?$$

Линеарна алгебра А — 11.12.2010.
Први колоквијум, други ток

А Дата су матрице

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ и } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Нека је U скуп свих матрица $X \in M_2(\mathbb{R})$ које комутирају са матрицом A и нека је W скуп свих матрица $X \in M_2(\mathbb{R})$ за које важи да је

$$X + X^T = c \cdot B, \quad \text{за неко } c \in \mathbb{R}.$$

1° Доказати да су U и W векторски потпростори простора $M_2(\mathbb{R})$.

2° Одредити бар једну базу за U и за W, као и димензије оба простора.

3° Показати да је $M_2(\mathbb{R}) = U + W$.
Да ли је сума и директна?

Б Нека је $U = \Omega(u_1, u_2, u_3)$, где је

$$\begin{aligned} u_1 &= (1,\ 1,\ 2,\ 1) \\ u_2 &= (3,\ 1,\ 4,\ 1) \\ u_3 &= (1,\ 2,\ 3,\ 2) \end{aligned}$$

и нека је W скуп решења система линеарних једначина

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & (1-\alpha)y & + & z & - & t & = & 0 \\ 2x & + & \alpha y & + & (2-2\alpha)z & - & t & = & 0 \\ 3x & + & y & + & \alpha z & - & 2t & = & 0 \\ -5x & + & (2\alpha-4)y & - & z & + & 3t & = & 0. \end{array}$$

Одредити $\alpha \in \mathbb{R}$ за које је $\dim W = 2$ и за такво α наћи по једну базу и димензије потпростора U, W, $U + W$ као и $U \bigcap W$.

В Нека је $\prod$ скуп свих полинома $p = a + bx + cx^2 + dx^3$ из $\mathbb{R}^4[x]$ за које важи

$$p(-1) + p'(0) - p''(0) = 0$$

$$p(1) - p(0) - p''(0) = -1.$$

1° Доказати да је $\prod$ један афини потпростор простора $\mathbb{R}^4[x]$ и одредити његову директрису U.

2° Одредити неку базу од U и надопунити је до базе целог простора $\mathbb{R}^4[x]$.

3° Да ли је директриса U садржана у потпростору генерисаном векторима

$$v_1 = 2 + x,$$

$$v_2 = -1 + x^2,$$

$$v_3 = 3 + x^3?$$