Линеарна алгебра А 2010/2011, први колоквијум (ТРЕЋИ ТОК) *11.12.2010.*

1. Нека је $U = \Omega(e_1, e_2, e_3)$, где је $e_1 = (1,0,1,-1)$, $e_2 = (2,1,0,1)$, $e_3 = (3,2,-1,3)$, и нека је V скуп решења система линеарних једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} \alpha x & + & 2y & + & z & - & (1+\alpha)t & = & 0 \\ -\alpha x & + & 2y & + & 3z & & & = & 0 \\ (1+\alpha)x & + & 2y & & & - & (1+2\alpha)t & = & 0 \\ 4x & + & 2y & - & 2z & - & (3+2\alpha)t & = & 0. \end{array}$$

Одредити $\alpha \in \mathbb{R}$ за које је $\dim V = 2$, и за такво α наћи димензију и барем по једну базу за U, V, $U \cap V$, $U + V$.

2. Нека је $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

(а) Одредити A^n за $n \in \mathbb{N}$.

(б) Доказати да је $U = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \,|\, AX = XA\}$ потпростор векторског простора $M_2(\mathbb{R})$. Одредити димензију и барем једну базу простора U и допунити ту базу до базе за $M_2(\mathbb{R})$.

3. Нека је $\Pi = \left\{ p \in \mathbb{R}^4[X] \,|\, p(1) + p'(-1) = 2,\ p(0) + \dfrac{1}{2} \cdot p''(2) = 6 \right\}$ и $W = \{p \in \mathbb{R}^4[X] \,|\, 2p - 2X \cdot p' + X^2 \cdot p'' = 0\}$.

(а) Доказати да је Π афини простор и одредити директрису U овог простора. Одредити димензију и барем једну базу за U.

(б) Доказати да је W потпростор векторског простора $\mathbb{R}^4[X]$. Одредити димензију и барем једну базу за W.

(в) Доказати да је $U + W = \mathbb{R}^4[X]$. Да ли је ова сума директна?

4. Нека су $\mathbb{U}$ и $\mathbb{W}$ потпростори векторског простора $\mathbb{V}$. Доказати да је $\mathbb{U} \subset \mathbb{W}$ или $\mathbb{W} \subset \mathbb{U}$ ако и само ако је $\mathbb{U} + \mathbb{W} \subset \mathbb{U} \cup \mathbb{W}$.

Линеарна алгебра А 2010/2011, први колоквијум (ТРЕЋИ ТОК) *11.12.2010.*

1. Нека је $U = \Omega(e_1, e_2, e_3)$, где је $e_1 = (1,0,1,-1)$, $e_2 = (2,1,0,1)$, $e_3 = (3,2,-1,3)$, и нека је V скуп решења система линеарних једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} \alpha x & + & 2y & + & z & - & (1+\alpha)t & = & 0 \\ -\alpha x & + & 2y & + & 3z & & & = & 0 \\ (1+\alpha)x & + & 2y & & & - & (1+2\alpha)t & = & 0 \\ 4x & + & 2y & - & 2z & - & (3+2\alpha)t & = & 0. \end{array}$$

Одредити $\alpha \in \mathbb{R}$ за које је $\dim V = 2$, и за такво α наћи димензију и барем по једну базу за U, V, $U \cap V$, $U + V$.

2. Нека је $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

(а) Одредити A^n за $n \in \mathbb{N}$.

(б) Доказати да је $U = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \,|\, AX = XA\}$ потпростор векторског простора $M_2(\mathbb{R})$. Одредити димензију и барем једну базу простора U и допунити ту базу до базе за $M_2(\mathbb{R})$.

3. Нека је $\Pi = \left\{ p \in \mathbb{R}^4[X] \,|\, p(1) + p'(-1) = 2,\ p(0) + \dfrac{1}{2} \cdot p''(2) = 6 \right\}$ и $W = \{p \in \mathbb{R}^4[X] \,|\, 2p - 2X \cdot p' + X^2 \cdot p'' = 0\}$.

(а) Доказати да је Π афини простор и одредити директрису U овог простора. Одредити димензију и барем једну базу за U.

(б) Доказати да је W потпростор векторског простора $\mathbb{R}^4[X]$. Одредити димензију и барем једну базу за W.

(в) Доказати да је $U + W = \mathbb{R}^4[X]$. Да ли је ова сума директна?

4. Нека су $\mathbb{U}$ и $\mathbb{W}$ потпростори векторског простора $\mathbb{V}$. Доказати да је $\mathbb{U} \subset \mathbb{W}$ или $\mathbb{W} \subset \mathbb{U}$ ако и само ако је $\mathbb{U} + \mathbb{W} \subset \mathbb{U} \cup \mathbb{W}$.