Линеарна алгебра А, шк.г. 2009/2010.

АПРИЛСКИ ИСПИТНИ РОК (први ток)

24.04.2010.

---

1. Дати су скупови
$$U = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \mid XA = AX\}, \qquad W = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr} X = 0\},$$
где је $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, а $\operatorname{tr} X$ траг матрице X (односно збир елемената главне дијагонале).

(а) Доказати да су U и W потпростори векторског простора $M_2(\mathbb{R})$.

(б) Одредити димензије и барем по једну базу простора U, W, $U + W$ и $U \cap W$.

2. Нека су $\mathbb{U}$ и $\mathbb{W}$ потпростори коначно-димензионалног векторског простора $\mathbb{V}$. Доказати:

(а) Ако је $\dim(\mathbb{U} + \mathbb{W}) = 1 + \dim(\mathbb{U} \cap \mathbb{W})$, онда је сума $\mathbb{U} + \mathbb{W}$ једнака једном од тих простора, а пресек $\mathbb{U} \cap \mathbb{W}$ другом потпростору;

(б) Ако је $\dim \mathbb{U} + \dim \mathbb{W} > \dim \mathbb{V}$, онда је $\mathbb{U} \cap \mathbb{W} \neq \{0\}$.

3. Нека је $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \lambda - 1 & -1 \\ 2 & 5 & -1 & \lambda + 2 \\ \lambda & 4 & -2 & 9 \end{bmatrix}$.

(а) У зависности од параметра λ одредити ранг матрице.

(б) Уколико је $\lambda = 1$ одредити канонску матрицу A^0 и инвертибилне матрице P и Q такве да је $A^0 = PAQ$.

4. Дато је пресликавање $L : \mathbb{R}^3[X] \to \mathbb{R}^3[X]$ са $L(p) = X^3 \cdot p''(-1) - (X^2 - X + 1) \cdot p' + p(-1)$.

(а) Доказати да је L линеарни оператор.

(б) Одредити $\operatorname{Ker} L$, $\operatorname{Im} L$, $\operatorname{def} L$, $\operatorname{rang} L$ и барем по једну базу за $\operatorname{Ker} L$ и $\operatorname{Im} L$. Да ли је пресликавање „1-1” или „на”?

(в) Одредити матрице оператора L и L^3 у односу на канонску базу векторског простора $\mathbb{R}^3[X]$. Одредити $L^3(1 + 2X + 3X^2)$.

5. Нека су α и β реални бројеви. Одредити детерминанту (реда n)
$$\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}.$$

Резултати ће бити објављени на сајту www.algebra.matf.bg.ac.rs.