Линеарна алгебра А, шк.г. 2009/2010.

АПРИЛСКИ ИСПИТНИ РОК (четврти ток)

24.04.2010.

1. Нека су $\mathbb{U}_1, \mathbb{U}_2, \ldots, \mathbb{U}_n, \ldots$ потпростори векторског простора $\mathbb{V}$ за које је

$$\mathbb{U}_1 \subset \mathbb{U}_2 \subset \ldots \subset \mathbb{U}_n \subset \ldots$$

Доказати да је $\mathbb{U} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbb{U}_n$ потпростор простора $\mathbb{V}$.

2. Нека су $\mathbb{U}$ и $\mathbb{W}$ потпростори коначно-димензионалног векторског простора $\mathbb{V}$. Доказати:

(а) Ако је $\dim(\mathbb{U}+\mathbb{W}) = 1 + \dim(\mathbb{U}\cap\mathbb{W})$, онда је сума $\mathbb{U}+\mathbb{W}$ једнака једном од тих простора, а пресек $\mathbb{U}\cap\mathbb{W}$ другом потпростору;

(б) Ако је $\dim\mathbb{U} + \dim\mathbb{W} > \dim\mathbb{V}$, онда сума $\mathbb{U}+\mathbb{W}$ није директна.

3. Дато је пресликавање $L : \mathbb{R}^3[X] \to \mathbb{R}^3[X]$ са $L(p) = (1-4X)\cdot p + (X+X^2)\cdot p' + (X^3 - X^2)\cdot p''$.

(а) Доказати да је L линеарни оператор и одредити матрицу пресликавања A у односу на канонске базе.

(б) Одредити минимални полином матрице A и димензију простора $\mathbb{R}[A]$.

(в) За $n \in \mathbb{N}$ одредити A^n.

4. Нека је $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 & \lambda+2 \\ -2 & \lambda & 4 & 9 \\ \lambda-1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

(а) У зависности од параметра λ одредити ранг матрице.

(б) Уколико је $\lambda = 1$ одредити канонску матрицу A^0 и инвертибилне матрице P и Q такве да је $A^0 = PAQ$.

5. Одредити детерминанту матрице реда $2n$ код које је сваки елемент једне највеће дијагонале једнак a, а сваки елемент друге највеће дијагонале једнак b, тј.

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & a & \cdots & b & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & b & \cdots & a & 0 \\ b & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}.$$

Резултати ће бити објављени на сајту www.algebra.matf.bg.ac.rs.