Линеарна алгебра А, други ток *17.4.2011.*

А Нека је дата матрица

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

1° Одредити карактеристични полином $\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ матрице A.

2° Одредити минимални полином μ матрице A.

3° Наћи матрицу A^n, $n \in \mathbb{N}$.

4° Одредити инверз матрице A.

Б Дата је квадратна матрица A реда 3 над пољем $\mathbb{R}$

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 2 & 3\alpha \\ 3\alpha & \alpha + 4 & 10\alpha \\ 2\alpha^2 & 6\alpha - 4 & 7\alpha^2 + 3\alpha \end{bmatrix}.$$

1° У зависности од параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ одредити ранг матрице A.

2° Ако је $\alpha = -1$, одредити канонску матрицу A^0 матрице A и инверзибилне матрице P и Q такве да је $A^0 = PAQ$.

В Нека је пресликавање $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ дефинисано са

$L(x, y, z, t) = (-x - 4y - z, x + 3y - t, x - 3z - 4t, y + z + t)$.

1° Доказати да је L један линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^4$.

2° Наћи матрицу A линеарног оператора L у односу на канонску базу e простора $\mathbb{R}^4$.

3° Одредити бар по једну базу језгра $\mathrm{Ker}L$ и слике $\mathrm{Im}L$, као и ранг и дефект линеарног оператора L.

Г Нека је $A \in M_n(\mathbb{R})$ матрица реда n за коју важи да је $A^2 = A$ и нека су

$U = \{X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0\}$ и
$W = \{X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \mid (E - A)X = 0\}$.

1° Доказати да су U и W векторски потпростори простора $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

2° Доказати да је $M_{n,1}(\mathbb{R}) = U \oplus W$.

Линеарна алгебра А, други ток *17.4.2011.*

А Нека је дата матрица

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

1° Одредити карактеристични полином $\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ матрице A.

2° Одредити минимални полином μ матрице A.

3° Наћи матрицу A^n, $n \in \mathbb{N}$.

4° Одредити инверз матрице A.

Б Дата је квадратна матрица A реда 3 над пољем $\mathbb{R}$

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 2 & 3\alpha \\ 3\alpha & \alpha + 4 & 10\alpha \\ 2\alpha^2 & 6\alpha - 4 & 7\alpha^2 + 3\alpha \end{bmatrix}.$$

1° У зависности од параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ одредити ранг матрице A.

2° Ако је $\alpha = -1$, одредити канонску матрицу A^0 матрице A и инверзибилне матрице P и Q такве да је $A^0 = PAQ$.

В Нека је пресликавање $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ дефинисано са

$L(x, y, z, t) = (-x - 4y - z, x + 3y - t, x - 3z - 4t, y + z + t)$.

1° Доказати да је L један линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^4$.

2° Наћи матрицу A линеарног оператора L у односу на канонску базу e простора $\mathbb{R}^4$.

3° Одредити бар по једну базу језгра $\mathrm{Ker}L$ и слике $\mathrm{Im}L$, као и ранг и дефект линеарног оператора L.

Г Нека је $A \in M_n(\mathbb{R})$ матрица реда n за коју важи да је $A^2 = A$ и нека су

$U = \{X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0\}$ и
$W = \{X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \mid (E - A)X = 0\}$.

1° Доказати да су U и W векторски потпростори простора $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

2° Доказати да је $M_{n,1}(\mathbb{R}) = U \oplus W$.