Linearna algebra A, Oktobar 2

Zadaci

1. Data je matrica A reda 3 nad poljem $\mathbb{R}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha+1 & -1 \\ \alpha & 6 & -2 \\ -1 & -3 & \alpha-1 \end{bmatrix}.$$

a) U zavisnosti od parametra $\alpha \in \mathbb{R}$ odrediti rang matrice A.

b) Ako je $\alpha = 2$, odrediti kanonsku matricu A^0 matrice A i inverzibilne matrice P i Q takve da je $A^0 = PAQ$.

c) Ako je $\alpha = 3$, odrediti inverz matrice A.

2. Neka je matrica A reda 3 nad poljem $\mathbb{R}$ odredjena sa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 8 & -11 & -8 \\ -8 & 8 & 5 \end{bmatrix}.$$

a) Odrediti neku bazu i dimenziju jezgra $Ker(A-E)$ i slike $Im(A-E)$ matrice $A-E$.

b) Odrediti karakteristični polinom $\varphi = det(A - \lambda E)$ i minimalni polinom μ matrice A.

c) Da li je matrica A slična nekoj dijagonalnoj matrici nad poljem $\mathbb{R}$? Ispitati da li postoji inverzibilna matrica P za koju je matrica $P^{-1}AP$ dijagonalna.

d) Odrediti sve komponente matrice A^n, gde je n bilo koji prirodan broj.

3*. Neka je $P \in M_n(\mathbb{R})$ kvadratna matrica reda n za koju važi da je $P^2 = P$.
Ako je $U = KerP$, a $W = Ker(E-P)$, dokazati da je $\mathbb{R}^n = U \oplus W$.

Teorija

1. Navesti aksiome vektorskih prostora i bar 3 primera ne-nula prostora.

2. Definicija baze i dimenzije. Navesti dimenziju i bar jednu bazu za prostor matrica formata 2x3, kao i za prostor simetričnih matrica reda 2.

3. Rang matrice

4. Definisati linearno preslikavanje, trag i transponat kvadratne matrice. Napisati osobine traga i transponovanja. Navesti dva primera ne-nula linearnih preslikavanja.