Линеарна алгебра А, октобар2 2009.

1 Нека је дата матрица над пољем $\mathbb{R}$:
$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

а) Одредити полином $\varphi(\lambda) = det(A - \lambda E)$ и наћи нуле тог полинома.

б) За сваку нулу α полинома $\varphi(\lambda)$ одредити све колоне $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ за које је
$(A - \alpha E)X = 0$.

в) Да ли се међу колонама нађеним под б) налазе и колоне матрице
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}?$$

г) Доказати да је матрица P инверзибилна и одредити њен инверз P^{-1}.

д) Одредити матрицу $D = P^{-1}AP$.

ђ) Наћи матрицу A^n, $n \in \mathbb{N}$.

е) Одредити све реалне низове a_n, b_n, c_n за које је
$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} a_{n+1} & = & -3a_n & - & 2b_n & - & 2c_n \\ b_{n+1} & = & 2a_n & + & b_n & + & 2c_n \\ c_{n+1} & = & 3a_n & + & 3b_n & + & 2c_n \end{array} \right\}$$
ако се зна да је $a_0 = 1$, $b_0 = -2$, $c_0 = -1$.

2 Дато је пресликавање $L : \mathbb{R}^3[x] \to \mathbb{R}^3[x]$ на следећи начин:
$L(a + bx + cx^2) = 3b - 3c + (-a + 4b - 3c)x + (-a + 3b - 2c)x^2$.

а) Доказати да је L један линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^3[x]$.

б) Одредити неке базе језгра KerL и слике ImL линеарног оператора L.

в) Наћи матрицу A линеарног оператора L у односу на канонску базу простора $\mathbb{R}^3[x]$.

г) Одредити матрицу B оператора L у односу на базу
$f = [f_1, f_2, f_3]$ где је $f_1 = 1 + x + x^2, f_2 = 3 + x, f_3 = -3 + x^2$.

д) Одредити матрицу преласка P са базе e на нову базу f и израчунати $P^{-1}AP$.

3 Израчунати детерминанту реда n
$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

4 Решити систем линеарних једначина на пољем K у зависности од вредности параметра α:
$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & - & z & + & t & = & 2 \\ 2x & + & 3y & - & 3z & + & 4t & = & 3 \\ -2x & & & + & (\alpha+1)z & + & 2t & = & \alpha - 5 \\ 2x & + & y & - & z & & & = & \alpha^2 + 4. \end{array}$$

5 Нека су U и W потпростори истог векторског простора димензије 10. Ако је $\mathrm{dimU} = 9$, а $\mathrm{dimW} = 8$, доказати да димензија њиховог пресека $U \bigcap W$ мора бити 8 или 7.