Линеарна алгебра А, други ток *08.02.2011.*

А Нека је дата матрица

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 8 & -4 & -3 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

1° Одредити карактеристични полином $\varphi(\lambda) = \det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{E})$ матрице A.

2° Одредити минимални полином μ матрице A.

3° Наћи матрицу A^n, $n \in \mathbb{N}$.

4° Одредити инверз матрице A.

Б Дата је квадратна матрица A над пољем $\mathbb{R}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & \alpha+6 & 1 \\ \alpha+1 & 3 & 3\alpha+4 & 2\alpha-1 \end{bmatrix}.$$

1° У зависности од параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ одредити ранг матрице A.

2° Ако је $\alpha = 4$, одредити канонску матрицу A^0 матрице A и инверзибилне матрице P и Q такве да је $A^0 = PAQ$.

В Нека је $\mathrm{V} = \mathbb{R}^3[\mathrm{X}]$ и пресликавање $\mathrm{L} : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ дефинисано са

$\mathrm{L}(\mathrm{p}) = (1 + \mathrm{X} + \mathrm{X}^2) \cdot \mathrm{p}'(-1) - \mathrm{X}^2 \cdot \mathrm{p}'(0)$.

1° Доказати да је L један линеарни оператор векторског простора V.

2° Наћи матрицу A линеарног оператора L у односу на канонску базу e простора V.

3° Одредити бар једну базу језгра $\mathrm{Ker\,L}$ и бар једну базу слике $\mathrm{Im\,L}$, а затим и ранг и дефект линеарног оператора L.

4° Одредити матрицу преласка P са базе e на нову базу $f = [f_1, f_2, f_3]$ где је $f_1 = 1,\ f_2 = 1 + X,\ f_3 = 2 + 2X + 3X^2$.

5° Наћи матрицу линеарног оператора L у односу на базу f?

Г Нека је $L : V \to W$ линеарно пресликавање векторских простора V и W такво да је $\mathrm{KerL} = \{0\}$. Ако су вектори $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ линеарно независни, доказати да су и $L(v_1), L(v_2), \ldots, L(v_n)$ линеарно независни.

Линеарна алгебра А, други ток *08.02.2011.*

А Нека је дата матрица

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 8 & -4 & -3 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

1° Одредити карактеристични полином $\varphi(\lambda) = \det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{E})$ матрице A.

2° Одредити минимални полином μ матрице A.

3° Наћи матрицу A^n, $n \in \mathbb{N}$.

4° Одредити инверз матрице A.

Б Дата је квадратна матрица A над пољем $\mathbb{R}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & \alpha+6 & 1 \\ \alpha+1 & 3 & 3\alpha+4 & 2\alpha-1 \end{bmatrix}.$$

1° У зависности од параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ одредити ранг матрице A.

2° Ако је $\alpha = 4$, одредити канонску матрицу A^0 матрице A и инверзибилне матрице P и Q такве да је $A^0 = PAQ$.

В Нека је $\mathrm{V} = \mathbb{R}^3[\mathrm{X}]$ и пресликавање $\mathrm{L} : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ дефинисано са

$\mathrm{L}(\mathrm{p}) = (1 + \mathrm{X} + \mathrm{X}^2) \cdot \mathrm{p}'(-1) - \mathrm{X}^2 \cdot \mathrm{p}'(0)$.

1° Доказати да је L један линеарни оператор векторског простора V.

2° Наћи матрицу A линеарног оператора L у односу на канонску базу e простора V.

3° Одредити бар једну базу језгра $\mathrm{Ker\,L}$ и бар једну базу слике $\mathrm{Im\,L}$, а затим и ранг и дефект линеарног оператора L.

4° Одредити матрицу преласка P са базе e на нову базу $f = [f_1, f_2, f_3]$ где је $f_1 = 1,\ f_2 = 1 + X,\ f_3 = 2 + 2X + 3X^2$.

5° Наћи матрицу линеарног оператора L у односу на базу f?

Г Нека је $L : V \to W$ линеарно пресликавање векторских простора V и W такво да је $\mathrm{KerL} = \{0\}$. Ако су вектори $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ линеарно независни, доказати да су и $L(v_1), L(v_2), \ldots, L(v_n)$ линеарно независни.