Линеарна алгебра А **27.2.2012.**
Трећи ток

$\boxed{\text{А}}$ Нека је дата матрица

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

1° Одредити карактеристични полином $\varphi(\lambda) = \det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{E})$ и минимални полином μ матрице A.

2° Да ли је матрица A слична некој дијагоналној матрици D на пољем $\mathbb{R}$? У потврдном случају одредити бар једну инверзибилну матрицу P за коју је $D = P^{-1}AP$.

3° Наћи матрицу A^n, $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{Б}}$ Дата је матрица A над пољем $\mathbb{R}$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & \alpha & -2 & 0 \\ 0 & \alpha - 1 & -1 & 0 \\ \alpha & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2\alpha & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1° У зависности од параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ одредити ранг матрице A.

2° Ако је $\alpha = 1$, одредити инверз матрице A.

$\boxed{\text{В}}$ Нека је $V = M_2(\mathbb{R})$ и пресликавање $L : V \to V$ дефинисано са

$L(X) = AX - XA$, где је $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

1° Доказати да је пресликавање $L : V \to V$ линеарно.

2° Наћи матрицу линеарног пресликавања L у односу на пар база (e, e) где је e канонска база простора V.

3° Одредити бар по једну базу језгра $\mathrm{Ker}L$ и слике $\mathrm{Im}L$, као и ранг и дефект линеарног пресликавања L.

$\boxed{\text{Г}}$ Нека су $L : V \to W$ и $G : W \to V$ линеарна пресликавања таква да је $L \circ G = I$ где је $I : W \to W$ пресликавање дефинисано са $I(w) = w$.

1° Доказати да за сваки вектор $v \in V$ вектор $v - G(L(v))$ припада језгру $\mathrm{Ker}L$.

2° Доказати да је $V = \mathrm{Ker}L + \mathrm{Im}G$. Да ли је сума и директна?

Линеарна алгебра А **27.2.2012.**
Трећи ток

$\boxed{\text{А}}$ Нека је дата матрица

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

1° Одредити карактеристични полином $\varphi(\lambda) = \det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{E})$ и минимални полином μ матрице A.

2° Да ли је матрица A слична некој дијагоналној матрици D на пољем $\mathbb{R}$? У потврдном случају одредити бар једну инверзибилну матрицу P за коју је $D = P^{-1}AP$.

3° Наћи матрицу A^n, $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{Б}}$ Дата је матрица A над пољем $\mathbb{R}$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & \alpha & -2 & 0 \\ 0 & \alpha - 1 & -1 & 0 \\ \alpha & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2\alpha & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1° У зависности од параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ одредити ранг матрице A.

2° Ако је $\alpha = 1$, одредити инверз матрице A.

$\boxed{\text{В}}$ Нека је $V = M_2(\mathbb{R})$ и пресликавање $L : V \to V$ дефинисано са

$L(X) = AX - XA$, где је $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

1° Доказати да је пресликавање $L : V \to V$ линеарно.

2° Наћи матрицу линеарног пресликавања L у односу на пар база (e, e) где је e канонска база простора V.

3° Одредити бар по једну базу језгра $\mathrm{Ker}L$ и слике $\mathrm{Im}L$, као и ранг и дефект линеарног пресликавања L.

$\boxed{\text{Г}}$ Нека су $L : V \to W$ и $G : W \to V$ линеарна пресликавања таква да је $L \circ G = I$ где је $I : W \to W$ пресликавање дефинисано са $I(w) = w$.

1° Доказати да за сваки вектор $v \in V$ вектор $v - G(L(v))$ припада језгру $\mathrm{Ker}L$.

2° Доказати да је $V = \mathrm{Ker}L + \mathrm{Im}G$. Да ли је сума и директна?