Линеарна алгебра А
група 103

10.02.2013.

А Нека је дата матрица

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

1° Одредити карактеристични полином $\varphi(\lambda) = \det(\mathrm{A} - \lambda\mathrm{E})$ и минимални полином μ матрице A.

2° Да ли је матрица A слична некој дијагоналној матрици D на пољем $\mathbb{R}$? У потврдном случају одредити бар једну инверзибилну матрицу P за коју је $D = P^{-1}AP$.

3° Наћи матрицу A^n, $n \in \mathbb{N}$.

4° Одредити све реалне низове x_n, y_n, z_n за које је

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_{n+1} & = & & - & y_n & - & z_n \\ y_{n+1} & = & x_n & + & 2y_n & + & z_n \\ z_{n+1} & = & x_n & + & y_n & + & 2z_n \end{array}$$

ако је $x_0 = 1$, $y_0 = 3$, $z_0 = -2$.

Б Дата је матрица A над пољем $\mathbb{R}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & \alpha - 7 & -3 \\ -1 & \alpha - 4 & \alpha^2 - 3\alpha \end{bmatrix}.$$

1° У зависности од параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ одредити ранг матрице A.

2° Ако је $\alpha = 0$, одредити инверз матрице A.

3° Ако је $\alpha = 1$, одредити канонску матрицу A^0 матрице A и инверзибилне матрице P и Qтакве да је $A^0 = PAQ$.

В Нека је $U = \{p \in \mathbb{R}^3[x] \mid \ p(0) = p'(0), \ p(1) = p'(1)\}$.

1° Доказати да је U векторски потпростор простора $\mathbb{R}^3[x]$.

2° Одредити бар једну базу и димензију простора U.

3° Ако је $W = \{p \in \mathbb{R}^3[x] \mid \ p(-1) = p''(-1)\}$ одредити бар једну базу и димензију потпростора W.

4° Да ли је сума потпростора U и W директна?

Г Нека су U_1,U_2 и W потпростори векторског простора V такви да је $V = U_1 \oplus U_2$. Ако је $U_1 \subseteq W$ или $U_2 \subseteq W$, доказати да је $W = (W \cap U_1) \oplus (W \cap U_2)$.

Све одговоре детаљно образложити

Линеарна алгебра А
група 103

10.02.2013.

А Нека је дата матрица

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

1° Одредити карактеристични полином $\varphi(\lambda) = \det(\mathrm{A} - \lambda\mathrm{E})$ и минимални полином μ матрице A.

2° Да ли је матрица A слична некој дијагоналној матрици D на пољем $\mathbb{R}$? У потврдном случају одредити бар једну инверзибилну матрицу P за коју је $D = P^{-1}AP$.

3° Наћи матрицу A^n, $n \in \mathbb{N}$.

4° Одредити све реалне низове x_n, y_n, z_n за које је

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_{n+1} & = & & - & y_n & - & z_n \\ y_{n+1} & = & x_n & + & 2y_n & + & z_n \\ z_{n+1} & = & x_n & + & y_n & + & 2z_n \end{array}$$

ако је $x_0 = 1$, $y_0 = 3$, $z_0 = -2$.

Б Дата је матрица A над пољем $\mathbb{R}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & \alpha - 7 & -3 \\ -1 & \alpha - 4 & \alpha^2 - 3\alpha \end{bmatrix}.$$

1° У зависности од параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ одредити ранг матрице A.

2° Ако је $\alpha = 0$, одредити инверз матрице A.

3° Ако је $\alpha = 1$, одредити канонску матрицу A^0 матрице A и инверзибилне матрице P и Q такве да је $A^0 = PAQ$.

В Нека је $U = \{p \in \mathbb{R}^3[x] \mid \ p(0) = p'(0), \ p(1) = p'(1)\}$.

1° Доказати да је U векторски потпростор простора $\mathbb{R}^3[x]$.

2° Одредити бар једну базу и димензију простора U.

3° Ако је $W = \{p \in \mathbb{R}^3[x] \mid \ p(-1) = p''(-1)\}$ одредити бар једну базу и димензију потпростора W.

4° Да ли је сума потпростора U и W директна?

Г Нека су U_1,U_2 и W потпростори векторског простора V такви да је $V = U_1 \oplus U_2$. Ако је $U_1 \subseteq W$ или $U_2 \subseteq W$, доказати да је $W = (W \cap U_1) \oplus (W \cap U_2)$.

Све одговоре детаљно образложити