Линеарна алгебра А, Фебруар 2014.

Групе 1О2 и 1О3 *10. фебруар 2014.*

1. Нека је $G = \{(a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid a^2 - b^2 = 1\}$. Доказати да је $(G,\star)$ Абелова група, где је операција $\star$ дефинисана са

$$(a,b)\star(x,y) = (ax+by, ay+bx).$$

2. У зависности од реалног параметра a решити систем линеарних једначина:

$$\begin{array}{ccccccc} (3a-1)x & + & 2ay & + & (3a+1)z & = & 1 \\ 2ax & + & 2ay & + & (3a+1)z & = & a \\ (a+1)x & + & (a+1)y & + & 2(a+1) & = & a^2. \end{array}$$

3. Нека је $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & a & -6 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$.

   а) Одредити ранг матрице A у зависности од реалног параметра a.

   б) Ако је $a = 2$, одредити инверз матрице A.

   в) Ако је $a = 3$, наћи инвертибилне матрице P и Q и канонску матрицу A^0 матрице A тако да је $A^0 = PAQ$. Одредити матрице $B \in M_{3,2}(\mathbb{R})$ и $C \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ тако да је $A = BC$.

4. Израчунати детерминанту реда n:

$$\begin{vmatrix} 1-x & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 4-x & 6 & \cdots & 2(n-1) & 2n \\ 3 & 6 & 9-x & \cdots & 3(n-1) & 3n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & 2(n-1) & 3(n-1) & \cdots & (n-1)^2-x & n(n-1) \\ n & 2n & 3n & \cdots & (n-1)n & n^2-x \end{vmatrix}.$$

Линеарна алгебра А, Фебруар 2014.

Групе 1О2 и 1О3 *10. фебруар 2014.*

1. Нека је $G = \{(a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid a^2 - b^2 = 1\}$. Доказати да је $(G,\star)$ Абелова група, где је операција $\star$ дефинисана са

$$(a,b)\star(x,y) = (ax+by, ay+bx).$$

2. У зависности од реалног параметра a решити систем линеарних једначина:

$$\begin{array}{ccccccc} (3a-1)x & + & 2ay & + & (3a+1)z & = & 1 \\ 2ax & + & 2ay & + & (3a+1)z & = & a \\ (a+1)x & + & (a+1)y & + & 2(a+1) & = & a^2. \end{array}$$

3. Нека је $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & a & -6 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$.

   а) Одредити ранг матрице A у зависности од реалног параметра a.

   б) Ако је $a = 2$, одредити инверз матрице A.

   в) Ако је $a = 3$, наћи инвертибилне матрице P и Q и канонску матрицу A^0 матрице A тако да је $A^0 = PAQ$. Одредити матрице $B \in M_{3,2}(\mathbb{R})$ и $C \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ тако да је $A = BC$.

4. Израчунати детерминанту реда n:

$$\begin{vmatrix} 1-x & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 4-x & 6 & \cdots & 2(n-1) & 2n \\ 3 & 6 & 9-x & \cdots & 3(n-1) & 3n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & 2(n-1) & 3(n-1) & \cdots & (n-1)^2-x & n(n-1) \\ n & 2n & 3n & \cdots & (n-1)n & n^2-x \end{vmatrix}.$$