Линеарна алгебра А
група 103

12.2.2015.

1 Нека је $G = \{(x_1, x_2): \ x_1, x_2 \in \mathbb{Q}, \ x_2 \neq 0\}$. Доказати да је $(G, \star)$ група, где је операција $\star$ дефинисана са

$$(x_1, x_2) \star (y_1, y_2) = (2x_1y_2 - 2y_2 + y_1, 2x_2y_2).$$

Да ли је група G комутативна?

2 Нека је $U = \Omega(f_1, f_2, f_3)$, где је

$$\begin{array}{rcl} f_1 & = & (1, \ 2, \ 0, \ 0) \\ f_2 & = & (1, \ 5, \ 2, \ 5) \\ f_3 & = & (2, \ 1, \ -2, \ -5) \end{array}$$

и нека је W скуп решења система линеарних једначина

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 6y & + & (3-\alpha)z & - & 2t & = & 0 \\ 2x & + & 2y & + & (2-\alpha)z & - & 2t & = & 0 \\ (2-\alpha)x & - & 2y & + & 2z & + & 2t & = & 0 \\ x & + & (10-\alpha)y & + & (3-\alpha)z & - & 2t & = & 0 \end{array}.$$

Одредити $\alpha \in \mathbb{R}$ за које је $\mathrm{dimW} = 2$ и за такво α наћи по једну базу и димензије потпростора U, W, $U + W$ као и $U \cap W$.

3 Дата је матрица A над пољем $\mathbb{R}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & \alpha & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 2 & \alpha - 4 \\ 2 & 5 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

а) У зависности од параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ одредити ранг матрице A.

б) Ако је $\alpha = 8$, одредити инверз матрице A.

4 Нека је $V = M_2(\mathbb{R})$ и нека је пресликавање $L: V \to V$ дефинисано са

$$L(X) = A \cdot X + X \cdot B, \ \text{ где је } \ A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \ \text{ и } \ B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

а) Доказати да је L линеарни оператор векторског простора V.

б) Наћи матрицу A линеарног оператора L у односу на канонску базу e простора V.

в) Одредити бар по једну базу језгра $\mathrm{Ker}L$ и слике $\mathrm{Im}L$, као и ранг и дефект линеарног оператора L.

Све одговоре детаљно образложити

Линеарна алгебра А
група 103

12.2.2015.

1 Нека је $G = \{(x_1, x_2): \ x_1, x_2 \in \mathbb{Q}, \ x_2 \neq 0\}$. Доказати да је $(G, \star)$ група, где је операција $\star$ дефинисана са

$$(x_1, x_2) \star (y_1, y_2) = (2x_1y_2 - 2y_2 + y_1, 2x_2y_2).$$

Да ли је група G комутативна?

2 Нека је $U = \Omega(f_1, f_2, f_3)$, где је

$$\begin{array}{rcl} f_1 & = & (1, \ 2, \ 0, \ 0) \\ f_2 & = & (1, \ 5, \ 2, \ 5) \\ f_3 & = & (2, \ 1, \ -2, \ -5) \end{array}$$

и нека је W скуп решења система линеарних једначина

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 6y & + & (3-\alpha)z & - & 2t & = & 0 \\ 2x & + & 2y & + & (2-\alpha)z & - & 2t & = & 0 \\ (2-\alpha)x & - & 2y & + & 2z & + & 2t & = & 0 \\ x & + & (10-\alpha)y & + & (3-\alpha)z & - & 2t & = & 0 \end{array}.$$

Одредити $\alpha \in \mathbb{R}$ за које је $\mathrm{dimW} = 2$ и за такво α наћи по једну базу и димензије потпростора U, W, $U + W$ као и $U \cap W$.

3 Дата је матрица A над пољем $\mathbb{R}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & \alpha & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 2 & \alpha - 4 \\ 2 & 5 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

а) У зависности од параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ одредити ранг матрице A.

б) Ако је $\alpha = 8$, одредити инверз матрице A.

4 Нека је $V = M_2(\mathbb{R})$ и нека је пресликавање $L: V \to V$ дефинисано са

$$L(X) = A \cdot X + X \cdot B, \ \text{ где је } \ A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \ \text{ и } \ B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

а) Доказати да је L линеарни оператор векторског простора V.

б) Наћи матрицу A линеарног оператора L у односу на канонску базу e простора V.

в) Одредити бар по једну базу језгра $\mathrm{Ker}L$ и слике $\mathrm{Im}L$, као и ранг и дефект линеарног оператора L.

Све одговоре детаљно образложити