Линеарна алгебра А, други ток *10.2.2010.*

А Нека је дата матрица

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

1° Одредити карактеристични полином $\varphi(\lambda) = det(A - \lambda E)$ и минимални полином μ матрице A.

2° Да ли је матрица A слична некој дијагоналној матрици D на пољем $\mathbb{R}$? У потврдном случају одредити бар једну инверзибилну матрицу P за коју је $D = P^{-1}AP$.

3° Наћи матрицу A^n, $n \in \mathbb{N}$.

4° Одредити све реалне низове $x_n,\ y_n,\ z_n$ за које је

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_{n+1} & = & x_n & + & 3y_n & + & 3z_n \\ y_{n+1} & = & -3x_n & - & 5y_n & - & 3z_n \\ z_{n+1} & = & 3x_n & + & 3y_n & + & z_n \end{array}$$

ако је $x_0 = 1,\ y_0 = 1,\ z_0 = 1$.

Б Нека је $\mathrm{V} = \mathbb{R}^3[\mathrm{x}]$ и пресликавање $\mathrm{L} : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ дефинисано са

$\mathrm{L(p) = p(-2) + (x-1)p'(-2)}$.

1° Доказати да је L један линеарни оператор векторског простора V.

2° Наћи матрицу A линеарног оператора L у односу на канонску базу $e = [1, x, x^2]$ простора V.

3° Одредити неку базу језгра $KerL$ и ранг линеарног оператора L.

4° Одредити матрицу преласка P са базе e на нову базу $f = [f_1, f_2, f_3]$ где је $f_1 = 1,\ f_2 = x + 2,\ f_3 = (x + 2)^2$.

5° Израчунати $B = P^{-1}AP$. Да ли је B и матрица линеарног оператора L у односу на базу f?

В Нека је матрица $A \in M_n(\mathbb{R})$ производ не-нула колоне $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ и не-нула врсте $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$.

1° Израчунати ранг $\rho(A)$.

2° Доказати да је $A^2 = (TrA) \cdot A$, где је TrA траг матрице A, тј. сума свих компонената њене дијагонале.

Линеарна алгебра А, други ток *10.2.2010.*

А Нека је дата матрица

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

1° Одредити карактеристични полином $\varphi(\lambda) = det(A - \lambda E)$ и минимални полином μ матрице A.

2° Да ли је матрица A слична некој дијагоналној матрици D на пољем $\mathbb{R}$? У потврдном случају одредити бар једну инверзибилну матрицу P за коју је $D = P^{-1}AP$.

3° Наћи матрицу A^n, $n \in \mathbb{N}$.

4° Одредити све реалне низове $x_n,\ y_n,\ z_n$ за које је

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_{n+1} & = & x_n & + & 3y_n & + & 3z_n \\ y_{n+1} & = & -3x_n & - & 5y_n & - & 3z_n \\ z_{n+1} & = & 3x_n & + & 3y_n & + & z_n \end{array}$$

ако је $x_0 = 1,\ y_0 = 1,\ z_0 = 1$.

Б Нека је $\mathrm{V} = \mathbb{R}^3[\mathrm{x}]$ и пресликавање $\mathrm{L} : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ дефинисано са

$\mathrm{L(p) = p(-2) + (x-1)p'(-2)}$.

1° Доказати да је L један линеарни оператор векторског простора V.

2° Наћи матрицу A линеарног оператора L у односу на канонску базу $e = [1, x, x^2]$ простора V.

3° Одредити неку базу језгра $KerL$ и ранг линеарног оператора L.

4° Одредити матрицу преласка P са базе e на нову базу $f = [f_1, f_2, f_3]$ где је $f_1 = 1,\ f_2 = x + 2,\ f_3 = (x + 2)^2$.

5° Израчунати $B = P^{-1}AP$. Да ли је B и матрица линеарног оператора L у односу на базу f?

В Нека је матрица $A \in M_n(\mathbb{R})$ производ не-нула колоне $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ и не-нула врсте $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$.

1° Израчунати ранг $\rho(A)$.

2° Доказати да је $A^2 = (TrA) \cdot A$, где је TrA траг матрице A, тј. сума свих компонената њене дијагонале.