Линеарна алгебра А **24.1.2012.**
Трећи ток

$\boxed{\text{А}}$ Нека је дата матрица

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

1° Одредити карактеристични полином $\varphi(\lambda) = \det(\mathrm{A} - \lambda\mathrm{E})$ и минимални полином μ матрице A.

2° Да ли је матрица A слична некој дијагоналној матрици D на пољем $\mathbb{R}$? У потврдном случају одредити бар једну инверзибилну матрицу P за коју је $D = P^{-1}AP$.

3° Наћи матрицу A^n, $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{Б}}$ Дата је матрица A над пољем $\mathbb{R}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3-\alpha & 4 \\ 1 & 2 & 4-\alpha \\ 2-\alpha & 2 & 3 \\ 2 & 5-\alpha & 7 \end{bmatrix}.$$

1° У зависности од параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ одредити ранг матрице A.

2° Ако је $\alpha = 2$, одредити канонску матрицу A^0 матрице A и инверзибилне матрице P и Q такве да је $A^0 = PAQ$.

$\boxed{\text{В}}$ Нека је $V = \mathbb{R}^3[x]$ и пресликавање $L : V \to V$ дефинисано са

$$L(p) = (x+2) \cdot p(0) + (x^2 - x) \cdot p'(1).$$

1° Доказати да је пресликавање $L : V \to V$ линеарно.

2° Наћи матрицу A линеарног пресликавања L у односу на пар база e, e где је $e = [1, x, x^2]$ канонска база простора V.

3° Одредити бар по једну базу језгра $\mathrm{Ker}L$ и слике $\mathrm{Im}L$, као и ранг и дефект линеарног пресликавања L.

4° Ако је $f_1 = 2 + x^2$, $f_2 = x - x^2$, $f_3 = -2x + x^2$, доказати да је $f = [f_1, f_2, f_3]$ база простора V, а затим наћи матрицу линеарног пресликавања L у односу на пар база f, f.

$\boxed{\text{Г}}$ Нека су U_1,U_2 и U_3 потпростори векторског простора V коначне димензије .

1° Доказати да је $(U_1 \cap U_3) + (U_2 \cap U_3) \subseteq (U_1 + U_2) \cap U_3$.

2° Ако за потпросторе U_2 и U_3 важи да је $U_2 \cap U_3 = \{0\}$, показати да је

$$\dim(\mathrm{U_1 + U_2 + U_3}) \leq \dim\mathrm{U_1} + \dim\mathrm{U_2} + \dim\mathrm{U_3} - \dim(\mathrm{U_1 \cap U_2}) - \dim(\mathrm{U_1 \cap U_3}).$$

Линеарна алгебра А **24.1.2012.**
Трећи ток

$\boxed{\text{А}}$ Нека је дата матрица

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

1° Одредити карактеристични полином $\varphi(\lambda) = \det(\mathrm{A} - \lambda\mathrm{E})$ и минимални полином μ матрице A.

2° Да ли је матрица A слична некој дијагоналној матрици D на пољем $\mathbb{R}$? У потврдном случају одредити бар једну инверзибилну матрицу P за коју је $D = P^{-1}AP$.

3° Наћи матрицу A^n, $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{Б}}$ Дата је матрица A над пољем $\mathbb{R}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3-\alpha & 4 \\ 1 & 2 & 4-\alpha \\ 2-\alpha & 2 & 3 \\ 2 & 5-\alpha & 7 \end{bmatrix}.$$

1° У зависности од параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ одредити ранг матрице A.

2° Ако је $\alpha = 2$, одредити канонску матрицу A^0 матрице A и инверзибилне матрице P и Q такве да је $A^0 = PAQ$.

$\boxed{\text{В}}$ Нека је $V = \mathbb{R}^3[x]$ и пресликавање $L : V \to V$ дефинисано са

$$L(p) = (x+2) \cdot p(0) + (x^2 - x) \cdot p'(1).$$

1° Доказати да је пресликавање $L : V \to V$ линеарно.

2° Наћи матрицу A линеарног пресликавања L у односу на пар база e, e где је $e = [1, x, x^2]$ канонска база простора V.

3° Одредити бар по једну базу језгра $\mathrm{Ker}L$ и слике $\mathrm{Im}L$, као и ранг и дефект линеарног пресликавања L.

4° Ако је $f_1 = 2 + x^2$, $f_2 = x - x^2$, $f_3 = -2x + x^2$, доказати да је $f = [f_1, f_2, f_3]$ база простора V, а затим наћи матрицу линеарног пресликавања L у односу на пар база f, f.

$\boxed{\text{Г}}$ Нека су U_1,U_2 и U_3 потпростори векторског простора V коначне димензије .

1° Доказати да је $(U_1 \cap U_3) + (U_2 \cap U_3) \subseteq (U_1 + U_2) \cap U_3$.

2° Ако за потпросторе U_2 и U_3 важи да је $U_2 \cap U_3 = \{0\}$, показати да је

$$\dim(\mathrm{U_1 + U_2 + U_3}) \leq \dim\mathrm{U_1} + \dim\mathrm{U_2} + \dim\mathrm{U_3} - \dim(\mathrm{U_1 \cap U_2}) - \dim(\mathrm{U_1 \cap U_3}).$$