Писмени испит из Линеарне алгебра А 24. јануар 2011.

1. Нека су U и V векторски потпростори векторског простора $\mathbb{R}^4[x]$ задати са $U = \mathcal{L}(1+x+x^2, 3-x^2+x^3)$ и $V = \mathcal{L}(-2+x+x^2-x^3, 2+2x+x^2)$. Одредити по једну базу за векторске потпросторе $U+V$ и $U \cap V$.
2. Нека је пресликавање $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ задато са $L\big((a,b,c)\big) = (2a+b-c, a-3c, a-b+c)$.
а) Доказати да је L линеарно пресликавање.
б) Одредити матрицу оператора L у односу на стандардну базу простора $\mathbb{R}^3$.
в) Доказати да је систем вектора $f = (f_1, f_2, f_3)$ база векторског простора $\mathbb{R}^3$, где је

$$\begin{array}{rcr} f_1 & = & (-2, \ -5, \ -3) \\ f_2 & = & (\ 3, \ \ 7, \ \ 4) \\ f_3 & = & (-1, \ -4, \ -2) \end{array}$$

г) Одредити матрицу преласка са стандардне базе векторског простора $\mathbb{R}^3$ на базу f.
д) Одредити матрицу пресликавања L у односу на базу f.
3. Нека је матрица

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

а) Одредити канонску форму A^0 и ранг матрице A.
б) Одредити матрице P и Q тако да $PAQ = A^0$.
в) Да ли је матрица A инверзибилна? Ако јесте, наћи A^{-1}.
4. Нека је матрица

$$B = \begin{bmatrix} -8 & 4 & 6 \\ -15 & 8 & 9 \\ -5 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Одредити карактеристични и минимални полином матрице B, затим B^n, за $n \in \mathbb{N}$, као и B^{-1}.
5. Доказати да за линеарни оператор L на простору V важи: $\mathrm{Ker}L^2 = \mathrm{Ker}L$ ако и само ако је $\mathrm{Ker}L \cap \mathrm{Im}L = \{0\}$.

Писмени испит из Линеарне алгебра А 24. јануар 2011.

1. Нека су U и V векторски потпростори векторског простора $\mathbb{R}^4[x]$ задати са $U = \mathcal{L}(1+x+x^2, 3-x^2+x^3)$ и $V = \mathcal{L}(-2+x+x^2-x^3, 2+2x+x^2)$. Одредити по једну базу за векторске потпросторе $U+V$ и $U \cap V$.
2. Нека је пресликавање $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ задато са $L\big((a,b,c)\big) = (2a+b-c, a-3c, a-b+c)$.
а) Доказати да је L линеарно пресликавање.
б) Одредити матрицу оператора L у односу на стандардну базу простора $\mathbb{R}^3$.
в) Доказати да је систем вектора $f = (f_1, f_2, f_3)$ база векторског простора $\mathbb{R}^3$, где је

$$\begin{array}{rcr} f_1 & = & (-2, \ -5, \ -3) \\ f_2 & = & (\ 3, \ \ 7, \ \ 4) \\ f_3 & = & (-1, \ -4, \ -2) \end{array}$$

г) Одредити матрицу преласка са стандардне базе векторског простора $\mathbb{R}^3$ на базу f.
д) Одредити матрицу пресликавања L у односу на базу f.
3. Нека је матрица

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

а) Одредити канонску форму A^0 и ранг матрице A.
б) Одредити матрице P и Q тако да $PAQ = A^0$.
в) Да ли је матрица A инверзибилна? Ако јесте, наћи A^{-1}.
4. Нека је матрица

$$B = \begin{bmatrix} -8 & 4 & 6 \\ -15 & 8 & 9 \\ -5 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Одредити карактеристични и минимални полином матрице B, затим B^n, за $n \in \mathbb{N}$, као и B^{-1}.
5. Доказати да за линеарни оператор L на простору V важи: $\mathrm{Ker}L^2 = \mathrm{Ker}L$ ако и само ако је $\mathrm{Ker}L \cap \mathrm{Im}L = \{0\}$.