Linearna algebra A, jun 2008. I i III tok

1. Data je matrica A reda 3 nad poljem $\mathbb{R}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda+1 & -1 \\ \lambda & 6 & -2 \\ -1 & -3 & \lambda-1 \end{bmatrix}.$$

a) U zavisnosti od parametra $\lambda \in \mathbb{R}$ odrediti rang matrice A.

b) Za $\lambda = 3$ odrediti inverz matrice A.

c) Za $\lambda = 2$ odrediti kanonsku matricu A^0 i inverzibilne matrice P i Q takve da je $A^0 = PAQ$.

2. Neka je matrica A reda 3 nad poljem $\mathbb{R}$ odredjena sa

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Odrediti neku bazu i dimenziju jezgra $Ker(A-3E)$ i slike $Im(A-3E)$ matrice $A-3E$.

b) Odrediti karakteristični polinom $\varphi = det(A-\lambda E)$ i minimalni polinom μ matrice A.

c) Da li je matrica A slična nekoj dijagonalnoj matrici nad poljem $\mathbb{R}$? Ispitati da li postoji inverzibilna matrica P za koju je matrica $P^{-1}AP$ dijagonalna.

d) Odrediti sve komponente matrice A^n, gde je n bilo koji prirodan broj.

e) Rešiti sistem diferencnih jednačina

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 2x_n + y_n - z_n \\ y_{n+1} &= 2x_n + 3y_n - 2z_n \\ z_{n+1} &= x_n + y_n \end{aligned}$$

ako su dati početni uslovi $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ i $z_0 = -1$.

3*. Neka je U skup svih matrica iz $M_n(\mathbb{R})$ koje komutiraju sa matricom

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{bmatrix}.$$

Dokazati da je U vektorski potprostor od $M_n(\mathbb{R})$ i odrediti neku njegovu bazu i dimenziju.

4**. Odrediti neku bazu prostora rešenja sistema linearnih jednačina

$$\begin{aligned} 2x + y - 3z + 4t &= 0 \\ 5x + 2y - 4z + 7t &= 0 \\ 3x + 2y - 8z + 9t &= 0 \end{aligned},$$

a zatim tu bazu dopuniti do baze celog prostora $\mathbb{R}^4$.