Линеарна алгебра А, јун 2009.

$\boxed{\text{А}}$ Нека је дата матрица

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

над пољем $\mathbb{R}$.

1° Одредити полином $\varphi(\lambda) = det(A - \lambda E)$ и наћи нуле тог полинома.

2° За сваку нулу α полинома $\varphi(\lambda)$ одредити све колоне $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ за које је $(A - \alpha E)X = 0$.

3° Да ли се међу колонама нађеним под 2° налазе и колоне матрице

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}?$$

4° Доказати да је матрица P инверзибилна и одредити њен инверз P^{-1}.

5° Одредити матрицу $D = P^{-1}AP$.

6° Наћи матрицу A^n, $n \in \mathbb{N}$.

7° Одредити све реалне низове a_n, b_n, c_n за које је

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2a_n - 2b_n - c_n \\ b_{n+1} &= -a_n + 3b_n + c_n \\ c_{n+1} &= 2a_n - 4b_n - c_n \end{aligned}$$

ако се зна да је $a_0 = 1$, $b_0 = 1$, $c_0 = 1$.

$\boxed{\text{Б}}$ Дата је матрица

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 7 & -5 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \end{bmatrix}$$

над пољем $\mathbb{R}$ и пресликавање $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ дефинисано са $L(X) = AX$.

1° Доказати да је пресликавање L линеарно.

2° Наћи матрицу пресликавања L у односу на канонску базу e векторског простора $\mathbb{R}^3$.

3° Одредити матрицу B пресликавања L у односу на базу $f = [f_1, f_2, f_3]$ где је $f_1 = (0, 1, 1)$, $f_2 = (1, 1, 0)$, $f_3 = (0, 0, 1)$.

4° Одредити матрицу преласка P са базе e на нову базу f.

Окренути страну

$\boxed{\text{Ц}}$ Израчунати детерминанту

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1(x_1-1) & x_1^2(x_1-1)\dots & x_1^{n-1}(x_1-1) \\ 1 & x_2(x_2-1) & x_2^2(x_2-1)\dots & x_2^{n-1}(x_2-1) \\ 1 & x_3(x_3-1) & x_3^2(x_3-1)\dots & x_3^{n-1}(x_3-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \ddots & \vdots \\ 1 & x_n(x_n-1) & x_n^2(x_n-1)\dots & x_n^{n-1}(x_n-1) \end{vmatrix}.$$

$\boxed{\text{Д}}$ Решити систем линеарних једначина на пољем K у зависности од вредности параметара α и β:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & + & x_5 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & = & -3 \\ -3x_1 & - & 5x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & + & \alpha x_5 & = & 2 \\ -x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & - & x_4 & + & \beta x_5 & = & 5. \end{array}$$

$\boxed{\text{Е}}$ Нека су V и W векторски простори коначне димензије над истим пољем K и нека је $L : V \to W$ линеарно пресликавање.
Ако је U векторски потпростор простора V, доказати да је тада

$$dim(L(U)) + \delta(L) = dim(U + KerL).$$

Резултати ће бити објављени на сајту www.algebra.matf.bg.ac.rs