Линеарна алгебра А
група 103

31.05.2013.

$\boxed{\text{А}}$ Нека је дата матрица

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

1° Одредити карактеристични полином $\varphi(\lambda) = \det(\mathrm{A} - \lambda\mathrm{E})$ и минимални полином μ матрице A.

2° Да ли је матрица A слична некој дијагоналној матрици D на пољем $\mathbb{R}$? У потврдном случају одредити бар једну инверзибилну матрицу P за коју је $D = P^{-1}AP$.

3° Наћи матрицу A^n, $n \in \mathbb{N}$.

4° Одредити бар једно решење матричне једначине

$$X^2 - 2X = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{\text{Б}}$ Дата је матрица A над пољем $\mathbb{R}$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3-2\alpha \\ \alpha & 0 & \alpha \\ \alpha-3 & \alpha-2 & 3\alpha-3 \end{bmatrix}.$$

1° У зависности од параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ одредити ранг матрице A.

2° Ако је $\alpha = 1$, одредити инверз матрице A.

3° Ако је $\alpha = 2$, одредити канонску матрицу A^0 матрице A и инверзибилне матрице P и Q такве да је $A^0 = PAQ$.

$\boxed{\text{В}}$ Нека је $U = \{p \in \mathbb{R}^4[X] \mid \ p(1) = p'(-1) = 0\}$.

1° Доказати да је U векторски потпростор простора $\mathbb{R}^4[X]$.

2° Одредити бар једну базу и димензију простора U.

3° Ако је W потпростор генерисан векторима
$f_1 = 1 + X + X^2 + X^3$,
$f_2 = 1 + 6X + X^2$,
$f_3 = 6 + X + X^3$,
одредити бар једну базу и димензију потпростора $U + W$ и $U \cap W$.

$\boxed{\text{Г}}$ Нека је $e = [e_1, e_2, \ldots, e_n]$ база векторског простора V, где је $n \geq 3$ непаран природан број. Доказати да је $f = [e_1+e_2, e_2+e_3, \ldots, e_{n-1}+e_n, e_n+e_1]$ такође база векторског простора V.

Све одговоре детаљно образложити

Линеарна алгебра А
група 103

31.05.2013.

$\boxed{\text{А}}$ Нека је дата матрица

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

1° Одредити карактеристични полином $\varphi(\lambda) = \det(\mathrm{A} - \lambda\mathrm{E})$ и минимални полином μ матрице A.

2° Да ли је матрица A слична некој дијагоналној матрици D на пољем $\mathbb{R}$? У потврдном случају одредити бар једну инверзибилну матрицу P за коју је $D = P^{-1}AP$.

3° Наћи матрицу A^n, $n \in \mathbb{N}$.

4° Одредити бар једно решење матричне једначине

$$X^2 - 2X = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{\text{Б}}$ Дата је матрица A над пољем $\mathbb{R}$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3-2\alpha \\ \alpha & 0 & \alpha \\ \alpha-3 & \alpha-2 & 3\alpha-3 \end{bmatrix}.$$

1° У зависности од параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ одредити ранг матрице A.

2° Ако је $\alpha = 1$, одредити инверз матрице A.

3° Ако је $\alpha = 2$, одредити канонску матрицу A^0 матрице A и инверзибилне матрице P и Q такве да је $A^0 = PAQ$.

$\boxed{\text{В}}$ Нека је $U = \{p \in \mathbb{R}^4[X] \mid \ p(1) = p'(-1) = 0\}$.

1° Доказати да је U векторски потпростор простора $\mathbb{R}^4[X]$.

2° Одредити бар једну базу и димензију простора U.

3° Ако је W потпростор генерисан векторима
$f_1 = 1 + X + X^2 + X^3$,
$f_2 = 1 + 6X + X^2$,
$f_3 = 6 + X + X^3$,
одредити бар једну базу и димензију потпростора $U + W$ и $U \cap W$.

$\boxed{\text{Г}}$ Нека је $e = [e_1, e_2, \ldots, e_n]$ база векторског простора V, где је $n \geq 3$ непаран природан број. Доказати да је $f = [e_1+e_2, e_2+e_3, \ldots, e_{n-1}+e_n, e_n+e_1]$ такође база векторског простора V.

Све одговоре детаљно образложити