Линеарна алгебра А
група 103

12.06.2015.

1 У зависности од параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ одредити сва решења система линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & - & t & = & -1 \\ 4x & + & 2y & + & 6z & + & 2t & = & \alpha+2 \\ 2x & - & 2y & + & \alpha z & + & (\alpha+4)t & = & \alpha+4 \\ 3x & + & 6y & + & (9-\alpha^2)z & - & (\alpha+3)t & = & -\alpha-3 \end{array}.$$

2 Нека је U скуп свих матрица из $M_2(\mathbb{R})$ које комутирају са матрицом $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, а W скуп свих матрица облика $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

а) Доказати да су U и W векторски потпростори простора $M_2(\mathbb{R})$.

б) Одредити бар једну базу за потпросторе U, W, $U+W$, $U \cap W$, као и димензије тих простора.

3 Дата је матрица A над пољем $\mathbb{R}$

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & -7 & 13 \\ -3 & -1 & 5 & -5 \\ 5 & 4 & 8 & 2\alpha-1 \end{bmatrix}.$$

а) У зависности од параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ одредити ранг матрице A.

б) Ако је $\alpha = 1$, одредити канонску матрицу A^0 матрице A и инверзибилне матрице P и Q такве да је $A^0 = PAQ$.

4 а) Доказати да је са $L(p) = \begin{bmatrix} p(1)-p(2) & 0 \\ 0 & p(0) \end{bmatrix}$ дефинисано линеарно пресликавање векторског простора $V = \mathbb{R}^3[X]$ у векторски простор $W = M_2(\mathbb{R})$.

б) Одредити матрицу $A = [L]_{e,f}$ у односу на пар канонских база простора V и W.

в) Наћи неке базе језгра $KerL$ и слике ImL.

г) Доказати да вектори $e'_1 = 1$, $e'_2 = 1+X$ и $e'_3 = 1+X+X^2$ чине базу простора V, као и да вектори $F'_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $F'_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $F'_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $F'_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ чине базу простора W. Затим одредити матрицу $B = [L]_{e',f'}$ у односу на пар тих база.

Све одговоре детаљно образложити

Линеарна алгебра А
група 103

12.06.2015.

1 У зависности од параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ одредити сва решења система линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & - & t & = & -1 \\ 4x & + & 2y & + & 6z & + & 2t & = & \alpha+2 \\ 2x & - & 2y & + & \alpha z & + & (\alpha+4)t & = & \alpha+4 \\ 3x & + & 6y & + & (9-\alpha^2)z & - & (\alpha+3)t & = & -\alpha-3 \end{array}.$$

2 Нека је U скуп свих матрица из $M_2(\mathbb{R})$ које комутирају са матрицом $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, а W скуп свих матрица облика $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

а) Доказати да су U и W векторски потпростори простора $M_2(\mathbb{R})$.

б) Одредити бар једну базу за потпросторе U, W, $U+W$, $U \cap W$, као и димензије тих простора.

3 Дата је матрица A над пољем $\mathbb{R}$

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & -7 & 13 \\ -3 & -1 & 5 & -5 \\ 5 & 4 & 8 & 2\alpha-1 \end{bmatrix}.$$

а) У зависности од параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ одредити ранг матрице A.

б) Ако је $\alpha = 1$, одредити канонску матрицу A^0 матрице A и инверзибилне матрице P и Q такве да је $A^0 = PAQ$.

4 а) Доказати да је са $L(p) = \begin{bmatrix} p(1)-p(2) & 0 \\ 0 & p(0) \end{bmatrix}$ дефинисано линеарно пресликавање векторског простора $V = \mathbb{R}^3[X]$ у векторски простор $W = M_2(\mathbb{R})$.

б) Одредити матрицу $A = [L]_{e,f}$ у односу на пар канонских база простора V и W.

в) Наћи неке базе језгра $KerL$ и слике ImL.

г) Доказати да вектори $e'_1 = 1$, $e'_2 = 1+X$ и $e'_3 = 1+X+X^2$ чине базу простора V, као и да вектори $F'_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $F'_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $F'_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $F'_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ чине базу простора W. Затим одредити матрицу $B = [L]_{e',f'}$ у односу на пар тих база.

Све одговоре детаљно образложити