Колоквијум из Линеарне алгебре А
група 103

15.12.2012.

А Дате су матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ из $M_2(\mathbb{R})$.
Нека је U скуп свих матрица X из $M_2(\mathbb{R})$ за које важи да је

$$AX + XB = 2X^T.$$

1° Доказати да је U векторски потпростор простора $M_2(\mathbb{R})$.

2° Одредити бар једну базу за U, као и димензију тог простора.

3° Ако је W скуп свих симетричних матрица из $M_2(\mathbb{R})$, показати да је

$$M_2(\mathbb{R}) = U \oplus W.$$

Б Нека је U потпростор простора $\mathbb{R}^4[X]$ генерисан векторима

$$p_1 = 1 + X - X^2 + X^3$$
$$p_2 = 1 - X - 2X^2 + 2X^3$$
$$p_3 = 1 - 2X - 2X^2 + 3X^3$$
$$p_4 = 5X + X^2 - 4X^3$$

и нека је W скуп свих полинома $p \in \mathbb{R}^4[X]$ за које важи да је

$$p(1) + p(-1) = 2p(0) \quad \text{и}$$
$$p'(-1) = 0.$$

Наћи по једну базу и димензије потпростора U, W, $U + W$ као и $U \bigcap W$.

В 1° У зависности од параметра $a \in \mathbb{R}$ одредити све решења система линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} -x & + & (a-2)y & + & az & + & (a+1)t & = & 1 \\ ax & + & (a-2)y & + & az & - & t & = & a \\ ax & + & (a-2)y & - & z & + & at & = & a. \end{array}$$

2° Ако је $a = -1$, доказати да је скуп Π свих решења система један афини потпростор простора $\mathbb{R}^4$ и одредити његову директрису U.

3° Одредити неку базу од U и надопунити је до базе целог простора $\mathbb{R}^4$.

Све одговоре детаљно образложити

Колоквијум из Линеарне алгебре А
група 103

15.12.2012.

А Дате су матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ из $M_2(\mathbb{R})$.
Нека је U скуп свих матрица X из $M_2(\mathbb{R})$ за које важи да је

$$AX + XB = 2X^T.$$

1° Доказати да је U векторски потпростор простора $M_2(\mathbb{R})$.

2° Одредити бар једну базу за U, као и димензију тог простора.

3° Ако је W скуп свих симетричних матрица из $M_2(\mathbb{R})$, показати да је

$$M_2(\mathbb{R}) = U \oplus W.$$

Б Нека је U потпростор простора $\mathbb{R}^4[X]$ генерисан векторима

$$p_1 = 1 + X - X^2 + X^3$$
$$p_2 = 1 - X - 2X^2 + 2X^3$$
$$p_3 = 1 - 2X - 2X^2 + 3X^3$$
$$p_4 = 5X + X^2 - 4X^3$$

и нека је W скуп свих полинома $p \in \mathbb{R}^4[X]$ за које важи да је

$$p(1) + p(-1) = 2p(0) \quad \text{и}$$
$$p'(-1) = 0.$$

Наћи по једну базу и димензије потпростора U, W, $U + W$ као и $U \bigcap W$.

В 1° У зависности од параметра $a \in \mathbb{R}$ одредити све решења система линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} -x & + & (a-2)y & + & az & + & (a+1)t & = & 1 \\ ax & + & (a-2)y & + & az & - & t & = & a \\ ax & + & (a-2)y & - & z & + & at & = & a. \end{array}$$

2° Ако је $a = -1$, доказати да је скуп Π свих решења система један афини потпростор простора $\mathbb{R}^4$ и одредити његову директрису U.

3° Одредити неку базу од U и надопунити је до базе целог простора $\mathbb{R}^4$.

Све одговоре детаљно образложити