Линеарна алгебра А, октобар 2009.

1 Нека је дата матрица над пољем $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

а) Одредити полином $\varphi(\lambda) = det(A - \lambda E)$ и наћи нуле тог полинома.

б) За сваку нулу α полинома $\varphi(\lambda)$ одредити све колоне $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ за које је

$(A - \alpha E)X = 0$.

в) Да ли се међу колонама нађеним под 2° налазе и колоне матрице

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}?$$

г) Доказати да је матрица P инверзибилна и одредити њен инверз P^{-1}.

д) Одредити матрицу $D = P^{-1}AP$.

ђ) Наћи матрицу A^n, $n \in \mathbb{N}$.

е) Одредити све реалне низове a_n, b_n, c_n за које је

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} a_{n+1} & = & 2a_n & - & 4b_n & + & 2c_n \\ b_{n+1} & = & -4a_n & + & 2b_n & - & 2c_n \\ c_{n+1} & = & 2a_n & - & 2b_n & - & c_n \end{array} \right\}$$

ако се зна да је $a_0 = 1,\ b_0 = 1,\ c_0 = 1$.

2 Дато је пресликавање $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ на следећи начин:
$L(x, y, z) = (2x + 3y, 3x + 5y - z, -y + 2z)$.

а) Доказати да је L један линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^3$.

б) Одредити неке базе језгра KerL и слике ImL линеарног оператора L.

в) Наћи матрицу A линеарног оператора L у односу на канонску базу простора $\mathbb{R}^3$.

г) Одредити матрицу B оператора L у односу на базу
$f = [f_1, f_2, f_3]$ где је $f_1 = (-3, 2, 1), f_2 = (1, 0, 3), f_3 = (3, 5, -1)$.

д) Одредити матрицу преласка P са базе e на нову базу f и израчунати $P^{-1}AP$.

3 Израчунати детерминанту реда n

$$D_n = \begin{vmatrix} 9 & 5 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 4 & 9 & 5 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 5 \ldots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 4 & 9 \end{vmatrix}.$$

4 Решити систем линеарних једначина на пољем K у зависности од вредности параметра α:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & - & y & + & \alpha z & + & t & = & 4 \\ x & + & y & - & 4z & - & 2t & = & \alpha \\ 4x & + & y & - & 5z & - & 3t & = & 10 \\ 5x & - & 4y & + & 13z & + & 5t & = & 9. \end{array}$$

5 Ако за потпросторе U,V,W једног векторског простора коначне димензије важи да је $W \subseteq V$, $U \cap V = U \cap W$ и $U + V = U + W$, доказати да је $V = W$.