Linearna algebra A, septembar 2008. I i III tok

1. Data je matrica A reda 3 nad poljem $\mathbb{R}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & \alpha \\ 1 & \alpha & 3 \end{bmatrix}.$$

a) U zavisnosti od parametra $\alpha \in \mathbb{R}$ odrediti rang matrice A.

b) Ako je $\alpha = 1$, odrediti inverz matrice A.

c) Ako je $\alpha = 2$, odrediti kanonsku matricu A^0 matrice A i inverzibilne matrice P i Q takve da je $A^0 = PAQ$.

2. Neka je matrica A reda 3 nad poljem $\mathbb{R}$ odredjena sa

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 6 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) Odrediti neku bazu i dimenziju jezgra $Ker(A - E)$ i slike $Im(A - E)$ matrice $A - E$.

b) Odrediti karakteristični polinom $\varphi = det(A - \lambda E)$ i minimalni polinom μ matrice A.

c) Da li je matrica A slična nekoj dijagonalnoj matrici nad poljem $\mathbb{R}$? Ispitati da li postoji inverzibilna matrica P za koju je matrica $P^{-1}AP$ dijagonalna.

d) Odrediti sve komponente matrice A^n, gde je n bilo koji prirodan broj.

e) Odrediti bar jednu matricu X za koju je $X^2 = A$.

3*. Neka su date matrice $A \in M_{mn}(K)$ i $B \in M_{np}(K)$.

Dokazati da su vrste matrice AB linearne kombinacije vrsta matrice B, a zatim i da je $\rho(AB) \leq \rho(B)$.

4**. Neka je U skup svih polinoma iz $\mathbb{R}^4[x]$ takvih da je $p(0) = 0$, a W skup svih polinoma iz $\mathbb{R}^4[x]$ takvih da je $p(1) = p'(1)$.

a) Pokazati da su U i W vektorski potprostori vektorskog prostora $\mathbb{R}^4[x]$.

b) Odrediti dimenziju i neku bazu njihovog preseka, kao i dimenziju prostora $U + W$.