Линеарна алгебра А, септембар 2009.

1 Нека је дата матрица над пољем $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -5 & 7 & -5 \\ -6 & 6 & -4 \end{bmatrix}.$$

а) Одредити полином $\varphi(\lambda) = det(A - \lambda E)$ и наћи нуле тог полинома.

б) За сваку нулу α полинома $\varphi(\lambda)$ одредити све колоне $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ за које је

$(A - \alpha E)X = 0.$

в) Да ли се међу колонама нађеним под 2° налазе и колоне матрице

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}?$$

г) Доказати да је матрица P инверзибилна и одредити њен инверз P^{-1}.

д) Одредити матрицу $D = P^{-1}AP$.

ђ) Наћи матрицу A^n, $n \in \mathbb{N}$.

е) Одредити све реалне низове a_n, b_n, c_n за које је

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} a_{n+1} & = & 4a_n & - & 2b_n & + & 2c_n \\ b_{n+1} & = & -5a_n & + & 7b_n & - & 5c_n \\ c_{n+1} & = & -6a_n & + & 6b_n & - & 4c_n \end{array} \right\}$$

ако се зна да је $a_0 = 1$, $b_0 = 1$, $c_0 = 1$.

2 Дато је пресликавање $L : \mathbb{R}^3[x] \to \mathbb{R}^3[x]$ на следећи начин:
$L(p) = x \cdot p'(x + 1) + p''(x)$.

а) Доказати да је L један линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^3[x]$.

б) Одредити неке базе језгра KerL и слике ImL линеарног оператора L.

в) Наћи матрицу A линеарног оператора L у односу на канонску базу простора $\mathbb{R}^3[x]$.

г) Одредити матрицу B оператора L у односу на базу
$f = [f_1, f_2, f_3]$ где је $f_1 = x, f_2 = 1 + 2x + x^2, f_3 = 1$.

д) Одредити матрицу преласка P са базе e на нову базу f и израчунати $P^{-1}AP$.

3 Израчунати детерминанту реда n

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & 0 & \ldots 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 & \ldots 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & x & \ldots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots 1+x^2 \end{vmatrix}, \text{ за } x^2 \neq 1.$$

4 Решити систем линеарних једначина на пољем K у зависности од вредности параметара α и β:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & - & 2y & + & 3z & + & 3u & = & 4 \\ 3x & - & 4y & + & 5z & + & 2u & = & 3 \\ 2x & - & 6y & + & 5z & - & 7u & = & -8 \\ -x & + & 4y & - & 3z & + & \alpha u & = & \beta. \end{array}$$

5 Нека су U и V различити векторски потпростори димензије 6 у векторском простору димензије 7. Одредити димензију пресека $U \bigcap V$.