Линеарна алгебра А, шк.г. 2009/2010.

СЕПТЕМБАРСКИ ИСПИТНИ РОК (први ток)

28.08.2010.

1. Одредити све реалне бројеве α за које је полином $a = 1 + 2X - 3X^2$ линеарна комбинација вектора

$$u = \alpha + X + X^2, \quad v = 1 + \alpha X + X^2, \quad w = 1 + X + \alpha X^2$$

у векторском простору $\mathbb{R}[X]$. За које α је полином a линеарна комбинација вектора u и v?

2. Ако је димензија суме два векторска потпростора за један већа од димензије њиховог пресека, доказати да један од њих мора бити садржан у оном другом.

3. Нека је $A = \begin{bmatrix} \lambda & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & 10 & 0 \end{bmatrix}$.

(а) У зависности од параметра λ одредити ранг матрице.

(б) Уколико је $\lambda = 3$ одредити канонску матрицу A^0 и инвертибилне матрице P и Q такве да је $A^0 = PAQ$.

4. За матрицу $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ дефинишемо пресликавање $L : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ формулом $L(X) = A^{-1}XA$.

(а) Доказати да је L линеарни оператор.

(б) Одредити $\operatorname{Ker} L$, $\operatorname{Im} L$, $\operatorname{def} L$, $\operatorname{rang} L$ и барем по једну базу за $\operatorname{Ker} L$ и $\operatorname{Im} L$. Да ли је пресликавање „1-1" или „на"?

(в) Одредити матрице оператора L и L^2 у односу на канонску базу векторског простора $M_2(\mathbb{R})$.

5. Одредити детерминанту (реда $n+1$)

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

Резултати ће бити објављени на сајту www.algebra.matf.bg.ac.rs.