Линеарна алгебра А
група 103

03.09.2015.

$\boxed{1}$ Нека је G скуп свих матрица облика $\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Доказати да је G група у односу на множење матрица. Да ли је група G комутативна?

$\boxed{2}$ Нека је U скуп свих полинома p из $\mathbb{R}^4[X]$ за које важи да је $p(1) = p(-1)$ и $p(2) = p(-2)$, а W скуп свих полинома p из $\mathbb{R}^4[X]$ за које важи да је $p(3) = p'(3) = 0$.

а) Доказати да су U и W векторски потпростори простора $\mathbb{R}^4[X]$.

б) Одредити бар једну базу за потпросторе U и W, а затим доказати да је $U \oplus W = \mathbb{R}^4[X]$.

$\boxed{3}$ Дата је матрица A над пољем $\mathbb{R}$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & \alpha+1 & 0 \\ \alpha+7 & 4 & 3 \\ 1 & \alpha+2 & 1 \end{bmatrix}.$$

а) У зависности од параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ одредити ранг матрице A.

б) Ако је $\alpha = -1$, одредити канонску матрицу A^0 матрице A и инверзибилне матрице P и Q такве да је $A^0 = PAQ$.

$\boxed{4}$ Нека је $L : \mathbb{R}^3[X] \to \mathbb{R}^3$ пресликавање дефинисано са

$$L(p) = (p'(0), p(1), p(-1)).$$

а) Доказати да је L линеарно пресликавање и одредити његову матрицу $A = [L]_{e,f}$ у односу на пар канонских база простора $\mathbb{R}^3[X]$ и $\mathbb{R}^3$.

б) Наћи неке базе језгра $KerL$ и слике ImL.

в) Доказати да вектори $e_1' = 1 - X^2$, $e_2' = X - X^2$ и $e_3' = 2 - 2X + X^2$ чине базу простора $\mathbb{R}^3[X]$, као и да вектори $f_1' = (1, 1, 3)$, $f_2' = (2, 0, -4)$ и $f_3' = (-2, 1, 5)$ чине базу простора $\mathbb{R}^3$.
Затим одредити матрицу $B = [L]_{e',f'}$ у односу на пар тих база.

Све одговоре детаљно образложити

Линеарна алгебра А
група 103

03.09.2015.

$\boxed{1}$ Нека је G скуп свих матрица облика $\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Доказати да је G група у односу на множење матрица. Да ли је група G комутативна?

$\boxed{2}$ Нека је U скуп свих полинома p из $\mathbb{R}^4[X]$ за које важи да је $p(1) = p(-1)$ и $p(2) = p(-2)$, а W скуп свих полинома p из $\mathbb{R}^4[X]$ за које важи да је $p(3) = p'(3) = 0$.

а) Доказати да су U и W векторски потпростори простора $\mathbb{R}^4[X]$.

б) Одредити бар једну базу за потпросторе U и W, а затим доказати да је $U \oplus W = \mathbb{R}^4[X]$.

$\boxed{3}$ Дата је матрица A над пољем $\mathbb{R}$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & \alpha+1 & 0 \\ \alpha+7 & 4 & 3 \\ 1 & \alpha+2 & 1 \end{bmatrix}.$$

а) У зависности од параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ одредити ранг матрице A.

б) Ако је $\alpha = -1$, одредити канонску матрицу A^0 матрице A и инверзибилне матрице P и Q такве да је $A^0 = PAQ$.

$\boxed{4}$ Нека је $L : \mathbb{R}^3[X] \to \mathbb{R}^3$ пресликавање дефинисано са

$$L(p) = (p'(0), p(1), p(-1)).$$

а) Доказати да је L линеарно пресликавање и одредити његову матрицу $A = [L]_{e,f}$ у односу на пар канонских база простора $\mathbb{R}^3[X]$ и $\mathbb{R}^3$.

б) Наћи неке базе језгра $KerL$ и слике ImL.

в) Доказати да вектори $e_1' = 1 - X^2$, $e_2' = X - X^2$ и $e_3' = 2 - 2X + X^2$ чине базу простора $\mathbb{R}^3[X]$, као и да вектори $f_1' = (1, 1, 3)$, $f_2' = (2, 0, -4)$ и $f_3' = (-2, 1, 5)$ чине базу простора $\mathbb{R}^3$.
Затим одредити матрицу $B = [L]_{e',f'}$ у односу на пар тих база.

Све одговоре детаљно образложити