Linearna algebra i analitička geometrija, I kolokvijum, novembar 2006.

1. Rešiti sistem: $\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 2z & = & 2 \\ 3x & - & 2y & - & z & = & 5 \\ 2x & - & 5y & + & 3z & = & -4 \\ x & + & 4y & + & 6z & = & 0 \end{array}$

2. Dokazati da je $W = \{A \in M_3(R) | \ A \ je \ gornje \ trougaona\}$ vektorski potprostor vektorskog prostora $V = M_3(R)$. Zatim odrediti bazu i dimenziju potprostora W.

3. Odrediti rang matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 9 & 5 & -3 & 4 \\ 5 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Odrediti bazu i dimenziju prostora $U + W$ ako su U i W potprostori vektorskog prostora $V = R^5$ generisani redom skupovima $\{(1,5,-6,6,3),(1,4,-3,4,2),(2,5,3,2,1)\}$, $\{(2,3,-1,-2,9),(1,3,-2,2,3),(1,3,0,2,1)\}$.

5. Ako je $V = M_2(R)$ prostor matrica 2x2 nad R i $M = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$, $L : V \to V$ linearno preslikavanje definisano sa $L(A) = MA$, odrediti rang, defekt i baze jezgra i slike datog preslikavanja L.

6. Ako je linearni operator L prostora R_3 zadat sa $L(x,y,z) = (2x - 3y + 23z, x + y + z, y - 4z)$:

a) Odrediti matricu operatora L u odnosu na kanonsku bazu $e = \{e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0)\ e_3 = (0,0,1)\}$.

b) Dokazati da je operator L invertibilan.

c) Odrediti matricu operatora L^{-1} u odnosu na kanonsku bazu $e = \{e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0)\ e_3 = (0,0,1)\}$.

Teorija

1. (a) Dati definiciju algebre.
   (b) Pokazati da skup svih matrica reda n nad poljem realnih brojeva uz operacije sabiranja matrica, množenja matrica sa skalarom i množenja matrica obrazuje asocijativnu algebru sa jedinicom.

2. Neka je $A : U \longrightarrow V$ linearni operator. Pokažite da
   (a) ako je L potprostor od U da je onda i $A(L) = \{Ax \mid x \in L\}$ potprostor od V.
   (b) ako je M potprostor od V da je onda i $A^{-1}(M) = \{x \in U \mid A(x) \in M\}$ potprostor od U.
   (c) ako je skup vektora $\{A(v_1), A(v_2), \ldots, A(v_k)\}$ linearno nezavisan da je onda i skup $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ takodje linearno nezavisan.

Rezultati

1. Sistem ima jedinstveno rešenje $x = 2$, $y = 1$, $z = -1$.
2. dimW=6;
baza potprostora W:
$\{E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$
$E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{33} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\}.$
3. $rang A = 4$
4. $dim\ U + W = 3$, baza: $\{(1,5,-6,6,3),\ (0,-1,3,-2,-1),\ (0,0,-2,0,2)\}$.
5. $\rho(L) =$dim $ImL = 2$, $\delta(L) =$dim $KerL = 2$, baza jezgra: $\{\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$, baza slike: $\{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\}$.
6. $[L]_e = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 23 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$, $[L^{-1}]_e = [L]_e^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 11 & -26 \\ 4 & -8 & 21 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$