Linearna algebra i analitička geometrija, I kolokvijum, 1.12.2006.

1. Rešiti sistem:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & - & 3z & + & 2w & = & 2 \\ 2x & + & 5y & - & 8z & + & 6w & = & 5 \\ 3x & + & 4y & - & 5z & + & 2w & = & 4 \\ 4x & + & 9y & - & 10z & + & 10w & = & 9 \end{array}$$

2. Dokazati da je $W = \{(a,b,c) \in R^3 | a - 2b + c = 0\}$ vektorski potprostor vektorskog prostora R^3. Zatim odrediti bazu i dimenziju potprostora W.

3. Odrediti rang matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 2 & -6 \end{pmatrix}$.

4. Odrediti bazu i dimenziju prostora $U + W$ ako su U i W potprostori vektorskog prostora $V = M_2(R)$ generisani redom skupovima $\{\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}\}$, $\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -7 & 7 \end{pmatrix}\}$.

5. Ako je L linearno preslikavanje iz vektorskog prostora R^4 u vektorski prostor R^3 definisano sa $L(x,y,z,t) = (2x - y, x + y + z - t, 3y - 2z + t)$, odrediti rang, defekt i baze jezgra i slike datog preslikavanja L.

6. Ako je linearni operator L prostora R^3 zadat sa $L(x,y,z) = (x + y, x + 2y + 2z, x + 2y + 5z)$:

a) Odrediti matricu operatora L u odnosu na kanonsku bazu $e = \{e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0)\ e_3 = (0,0,1)\}$.

b) Dokazati da je operator L invertibilan.

c) Odrediti matricu operatora L^{-1} u odnosu na kanonsku bazu $e = \{e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0)\ e_3 = (0,0,1)\}$.

Teorija

1. (a) Dati definiciju baze i dimenzije vektorskog prostora.

   (b) Ako je U potprostor vektorskog prostora V, dokazati da je $dimU$ manje ili jednako $dimV$.

2. (a) Dati definiciju ranga i defekta linearnog operatora.

   (b) Ako je $L : U \to U$ linearni operator, dokazati da je $KerL$ potprostor U.