Linearna algebra i analitička geometrija, II kolokvijum, februar 2007.

1. Ako je linearni operator L prostora R^4 zadat sa $L(x,y,z,t) = (-4x+y+2z-2t, 3y+t, 2x-3y+z-3t, -x-y+3z-t)$ izračunati determinantu operatora L.

2. Izračunati A^{-1} (koristeći determinante) ako je $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Odrediti karakteristični i minimalni polinom matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -9 \\ -11 & 24 & -33 \\ -6 & 12 & -16 \end{pmatrix}$. Zatim odrediti sopstvene vrednosti i baze odgovarajućih sopstvenih prostora matrice A.

4. Na vektorskom prostoru $R^2[x]$ linearni operator L je zadat svojom matricom $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$ u kanonskoj bazi prostora.

a) Naći sopstvene vrednosti i sopstvene vektore operatora L.

b) Proveriti da li je L dijagonalizabilan i ako jeste odrediti odgovarajuce matrice: B (dobijena dijagonalizacijom matrice A), P i P^{-1}.

c) Izračunati A^n.

5. Odrediti Gram-Šmitovim postupkom ortonorminaru bazu potprostora W prostora R^4 generisanog vektorima $u_1 = (1,1,1,1)$, $u_2 = (1,0,1,0)$ i $u_3 = (-1,2,0,1)$. Zatim odrediti bazu ortogonalnog komplementa prostora W, $W^{\perp}$.

6. Odrediti ugao koji vektor $v = (1,0,-1)$ zaklapa sa skupom rešenja W jednačine $-2x+y+z=0$ u R^3 u odnosu na standarni skalarni proizvod. Zatim odrediti rastojanje vektora v od datog potprostora W.

Teorija

1. (a) Definisati karakteristični i minimalni polinom matrice.
   (b) Pokazati da slične matrice imaju isti minimalni polinom.
   (c) Iskazati i dokazati Hamilton-Cayleyevu teoremu.
2. (a) Definisati simetričnu bilinernu i kvadratnu formu na realnom vektorskom prostoru.
   (b) Iskazati i dokazati zakon inercije (Sylvesterovu teoremu) za realne simetrične bilinearne forme.
   (c) Dati geometrijsku interpretaciju sopstvenih vektora simetrične matrice nad $\mathbb{R}$.

Rezultati

1. $detL = det[L]_e = -93$, gde je e neka baza prostora R^4 (npr. kanonska baza $e = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$

2. $A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 12 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

3. $\Delta_A(\lambda) = -(\lambda-2)^2(\lambda-3)$, $\mu_A(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-3)$; sopstvene vrednosti su $\lambda_{1,2} = 2$ i $\lambda_3 = 3$, a baze odgovarajućih sopstvenih potprostora su $\{(2,1,0),(-3,0,1)\}$ za $\lambda_{1,2} = 2$ i $\{(3,11,6)\}$ za $\lambda_3 = 3$.

4. a) $\Delta_A(\lambda) = \lambda(\lambda-7)$, pa su sopstvene vrednosti su $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = -7$, a odgovarajući sopstveni vektori $v_1 = 3+x$ i $v_2 = 1-2x$

b) Pošto su dobijena 2 linearno nezavisna sopstvena vektora, a $dimR^2[x] = 2$, operator L je dijagonalizabilan. Tražene matrice su: $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ i $P^{-1} = \frac{-1}{7}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

c) $A^n = PB^nP^{-1} = (-7)^{n-1}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$

5. Tražena ortonormirana baza je: $\{v_1 = (\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}), v_2 = (\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}), v_3 = (-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2})\}$, a baza ortogonalnog komplementa je $\{(1,1,-1,-1)\}$

6. $W^{\perp} = L(e = (-2,1,1))$; ako je $v = \alpha e + w$, gde je $w \in W$ dobija se $w = (0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ i $\alpha = -\frac{1}{2}$. Zato je $\cos\angle(v,W) = \cos\angle(v,w) = \frac{1}{2}$ tj. traženi ugao je $\frac{\pi}{3}$, a rastojanje $d(v,W) = \|\frac{-1}{2}e\| = \frac{\sqrt{6}}{2}$